

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
INSTITUTO DE FÍSICA

JOÃO AUGUSTO SOBRAL DA SILVA

**DECAIMENTO DE FÉRMIONS ACELERADOS,  
EFEITO UNRUH E APLICAÇÕES NO REGIME  
SEMI-CLÁSSICO**

BRASÍLIA  
2 DE DEZEMBRO DE 2019



João Augusto Sobral da Silva

# **Decaimento de Férmions Acelerados, Efeito Unruh e Aplicações no Regime Semi-Clássico**

Monografia apresentada ao Instituto de Física da Universidade de Brasília como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Bacharel em Física.

Orientador: Clovis Achy Soares Maia

Universidade de Brasília – UnB

Instituto de Física

Brasília

2 de Dezembro de 2019

---

João Augusto Sobral da Silva

Decaimento de Férmions Acelerados, Efeito Unruh e Aplicações no Regime  
Semi-Clássico/ João Augusto Sobral da Silva. – Brasília, 2 de Dezembro de 2019-  
80 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Clovis Achy Soares Maia

Monografia – Universidade de Brasília – UnB  
Instituto de Física, 2 de Dezembro de 2019.

---

João Augusto Sobral da Silva

## **Decaimento de Férmions Acelerados, Efeito Unruh e Aplicações no Regime Semi-Clássico**

Monografia apresentada ao Instituto de Física da Universidade de Brasília como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Bacharel em Física.

Brasília, 2 de Dezembro de 2019:

---

**Clovis Achy Soares Maia**  
Orientador

---

**Vanessa Carvalho de Andrade**  
Convidado 1

---

**Marco César Barbosa Fernandes**  
Convidado 2

Brasília  
2 de Dezembro de 2019



# Agradecimentos

O presente trabalho sumariza, em minha visão, os anos mais significativos e bem vividos de minha existência. Em cada linha de conta escrita, estão presentes memórias de excelentes discussões e momentos que tive com pessoas inspiradoras, responsáveis por fornecer o ambiente propício para que eu pudesse me aventurar além de minhas limitações criativas – presentes em cada estágio de desenvolvimento não só do projeto, mas da graduação como um todo. Além disso, de uma maneira mais indireta, estão presentes também memórias de pessoas sem as quais tudo teria sido tão mais difícil nessa longa caminhada, às quais desejo citar singelos agradecimentos.

Aos meus pais, que no meio de uma tempestade foram responsáveis por instigar muitas das reflexões que sigo hoje como filosofia de vida, além de fornecerem os meios materiais e motivacionais para que eu pudesse seguir um caminho fundamentado em algo que me desperta o mais profundo interesse. Tenho muito orgulho da história de vocês e dos desafios que enfrentaram para fornecer uma educação exemplar para mim e minha irmã.

À Luana, pelo incrível exemplo de persistência e coragem, e por sempre ter me incentivado desde nossa adolescência. Também ao Ricardo pelo apoio desde nossas primeiras conversas!

À família Garcia, em especial à minha madrinha Iozenita e padrinho José Batista - responsáveis por grande parte da minha educação. Obrigado por sempre terem me fornecido um lar, com ensinamentos e puxões de orelha valiosos e necessários para o caminho que me levou até aqui; também pelo constante apoio que tem dado à minha família mesmo antes de meu nascimento; apesar de distante em alguns momentos na graduação, nunca me esqueço de vocês.

À Nídia e Denise, por terem me ajudado a ver um João Augusto que poderia construir e buscar muito mais do que eu poderia imaginar.

Ao meu amigo e irmão Eduardo pela grande amizade e pelo constante exemplo de dedicação e seriedade frente a diversos aspectos da vida. Também à sua família por sempre terem me recebido muito bem em sua casa.

Aos meus amigos de ensino médio Geovane, Rômulo e João Paulo pelas ótimas risadas e programações culinárias.

À minha eterna parceira de laboratório, Ana, e aos meus companheiros e companheiras de aventura, Pedro, Alves, Lucas e Tábata. Aos meus preciosos amigos e amigas Lettieri, Valeriano, Miguel, Mariana e Gracielle. Também ao Ranier, Felipe, Leandro,

PM e à Lud por terem me ensinado que a vida deve ser levada de maneira mais leve.

Ao Vitor, pelas excelentes conversas sobre física e sobre a vida nas voltas para casa e importantes orientações desde o início de nossa amizade, ambas essenciais para muitas de minhas decisões.

À Olga, por colorir um mundo que antes era tão cinza e por me fazer ver poesia até nos mais simples detalhes da vida. Levo comigo em cada passo todos os nossos momentos juntos. Obrigado por todo amor, apoio e carinho.

À família Souza, que me receberam sempre de maneira sincera e carinhosa, e assim, me forneceram, em muitas ocasiões, um momento de descanso de toda a correria. Obrigado por me incentivarem e inspirarem das mais diversas formas.

Aos Professores e Professoras Olavo, Clovis, Vanessa, Pedroza, Pinzul, Arsen, Júnior, Alexandra e Paulo Narcizo por minha formação sólida em física teórica e experimental e pelo exemplo de seriedade e profissionalismo. Fazer jus a todo o trabalho de vocês é um desafio que pretendo seguir como futuro físico.

Às professoras Marianna Penna-Lima e Vanessa Carvalho e aos Professores Daniel Müller e Marco César pela carisma, excelentes sugestões e revisão minuciosa do manuscrito. Ao Prof<sup>o</sup>. Daniel Augusto T. Vanzella pelo fornecimento de boa vontade da Figura 4. Também ao Lettieri, Pedro, Felipe e Vitor pela revisão de importantes conceitos no trabalho e à Olga pelo português.

Ao Prof<sup>o</sup>. Clovis Achy Soares Maia pela oportunidade de trabalhar na revisão de um tema o mais próximo possível de meus interesses em um dado momento, e pelas valiosas lições de física, ética e vida que tive a oportunidade de presenciar em journal clubs, reuniões e aulas ao longo da graduação. Além disso, pela chance de conhecer sua personalidade cativante e posição instigadora e desafiadora como orientador e professor. Me sinto profundamente orgulhoso e grato de ter sido seu aluno nesse momento tão importante na minha formação.

À Fundação Universidade de Brasília (*FUB*) pelo auxílio financeiro em projetos de iniciação científica e eventos em outros estados e à toda sociedade que propiciou mecanismos semelhantes e primordiais para o desenvolvimento científico.

No fim de tudo, esse trabalho poderia ser um grande obrigado, um infinito obrigado à pessoa que mais acreditou em todo meu potencial e me inspirou a tentar aprender de todas as formas não faladas verbalmente ou escritas, todas as formas discretas e indagadoras de ver o mundo. Mãe, nada disso seria possível sem você. Obrigado, obrigado e obrigado.



# Resumo

Em uma introdução à teoria quântica de campos, breves noções em espaços curvos e à fenomenologia de partículas elementares, uma revisão de trabalhos foi realizada visando-se a compreensão do Efeito Unruh em sua necessidade para a consistência da teoria quântica de campos ao se considerar o decaimento de férmions uniformemente acelerados em referenciais co-acelerados e inerciais. Tratando partículas através do formalismo de *correntes semi-clássicas*, revisou-se também a possível influência de campos gravitacionais em mecanismos de resfriamento em estrelas de nêutrons e a possibilidade de detecção de partículas com energia menor que sua massa de repouso.

**Palavras-chaves:** efeito unruh. decaimento de férmions acelerados. teoria quântica de campos. coordenadas de Rindler. decaimentos beta.



# Abstract

In an introduction to quantum field theory, brief notions in curved spaces and to the phenomenology of elementary particles, a revision work was developed focusing on the comprehension of the Unruh Effect in its necessity for the consistency of quantum field theory itself when considering the decay of uniformly accelerated fermions, both in an inertial reference frame and in the Rindler wedge frame. Considering particles through the formalism of semi-classical currents, another topic of study was the influence of gravitational fields in cooling mechanisms of neutron stars and the possibility of detecting particles that do not obey the famous dispersion relation in Earth's vicinity.

**Key-words:** unruh effect. decay of uniformly accelerated fermions. quantum field theory. rindler wedge. beta decays.



# Lista de ilustrações

Figura 1	– Diagrama representativo da equivalência entre as duas teorias no regime de baixas energias. O diagrama à esquerda representa a amplitude de espalhamento (1.8) e o à direita, (1.5). Fonte: [1]. . . . .	24
Figura 2	– Diagramas de Feynman para o decaimento $\beta^-$ : i) representação mais fundamental em termos da estrutura interna dos bárions; ii) representação simplificada com bárions sendo tratados como partículas pontuais; iii) representação de um acoplamento direto no regime de Fermi. Fonte: Adaptada de [2]. . . . .	25
Figura 3	– Tabela ilustrativa de todas as partículas e mediadores de força descobertos pelo modelo padrão. Um interessante diagrama interativo se encontra em <i>Symmetry Magazine</i> . As notações de processos em partículas será feita com base na nomenclatura empregada aqui. Fonte: <i>Lucy-Reading-Ikkanda for Quanta Magazine</i> . . . . .	26
Figura 4	– Representação das linhas de mundo de observadores uniformemente acelerados no quadrante de Rindler. Na figura à esquerda as linhas azuis indicam os observadores inerciais, enquanto que as vermelhas os acelerados uniformemente. Na figura à direita, no referencial de observadores acelerados, as linhas vermelhas são todos referenciais co-acelerados. Fonte: [3]. . . . .	38
Figura 5	– Diagrama esquemático de $t$ por $v$ do decaimento de férmions visto no quadrante direito de Rindler. A partícula $C$ é inacessível causalmente pelos referenciais acelerados uniformemente (em azul); a linha $t = +\infty$ se comporta como um horizonte de eventos para esses observadores. A radiação emitida no cone de luz futuro da partícula $B$ pode ser detectada por um observador inercial (em verde). Fonte: Elaborada pelo Autor. . . . .	39
Figura 6	– Contorno do polo $w^+ = 1$ das equações (2.50) e (2.51). Os caminhos são dados por $\gamma_{\pm} := [0, 1 - \epsilon'] \cup \{1 \pm \epsilon' e^{i\theta}; \theta \in [0, \pi]\} \cup [1 + \epsilon', +\infty)$ com $\epsilon' \rightarrow 0_+$ . Fonte: Elaborada pelo Autor. . . . .	43
Figura 7	– Tempos de meia vida (2.57) para as transições (1.9) em função da aceleração própria dos bárions iniciais. Os tempos de meia vida reproduzem os resultados inerciais em $\log(\tau_n) = \log(887) \approx 2.94$ e $\log(\tau_p)$ cresce indefinidamente com $a \rightarrow 0$ . Fonte: Adaptada de [4]. . . . .	45
Figura 8	– Contribuição da energia emitida na forma de cada lépton para as transições (1.9). As equações (2.46) e (2.47) reproduzem os mesmos comportamentos em ambos os decaimentos. Fonte: Adaptada de [4]. . . . .	46

Figura 9 – <i>Distribuições (normalizadas) em energia de léptons emitidos em (1.9) para duas acelerações próprias do núcleon, obtidas através da expressão (2.59). Fonte: Adaptada de [4]. . . . .</i>	47
Figura 10 – <i>Evoluções das taxas relativas nos processos (2.91) e (2.65) pela aceleração própria do núcleon no referencial de Rindler para os processos, todas obtidos através das expressões (2.96). Fonte: [4]. . . . .</i>	54
Figura 11 – <i>Densidades de probabilidade (3.16) para diferentes valores de <math>\omega/m</math> com <math>M = (4m)^{-1}</math>. Fonte: [4]. . . . .</i>	58
Figura 12 – <i>Comportamento da taxa de excitação <math>\mathcal{R}_{\omega_0}</math> (3.18) por tempo próprio dos observadores como função de <math>\omega_0/m</math>. As curvas (de baixo para cima) são dadas em função de diferentes posições: <math>\rho_0 = 4M</math>, <math>\rho_0 = 8M</math> e <math>\rho_0 = 16M</math>. Fonte: [4]. . . . .</i>	59
Figura 13 – <i>Comportamento da taxa de reação relativa (3.27) em função do logaritmo da aceleração do núcleon para o caso I em que a estrela está fria o suficiente para que os neutrinos não interajam com as outras partículas, e para o caso II em que o interior da estrela como um todo está em equilíbrio térmico. Fonte: Adaptada de [4]. . . . .</i>	62

# Sumário

	Introdução . . . . .	15
<b>I</b>	<b>TEORIA QUÂNTICA DE CAMPOS E ELEMENTOS EM FÍSICA DE PARTÍCULAS</b>	<b>19</b>
1	TEORIA QUÂNTICA DE CAMPOS E CONCEITOS INICIAIS . . .	21
1.1	Vácuo, Partículas e Simetrias do Espaço-Tempo . . . . .	21
1.2	Interações Fracas e o Regime de Fermi . . . . .	23
1.3	Fatores de Forma . . . . .	24
1.4	Detectores de Unruh-DeWitt . . . . .	25
1.4.1	Caso I: Trajetórias não aceleradas . . . . .	27
1.4.2	Caso II: Trajetórias aceleradas uniformemente . . . . .	29
<b>II</b>	<b>APLICAÇÕES NO REGIME SEMI-CLÁSSICO</b>	<b>31</b>
2	DECAIMENTO DE FÉRMIONS UNIFORMEMENTE ACELERADOS . . . . .	33
2.1	Correntes Semi-Clássicas e Condições de Validade . . . . .	33
2.2	Emissão de pares $\bar{f}f$ . . . . .	34
2.3	Núcleon Uniformemente Acelerado . . . . .	37
2.3.1	Caso I: Emissão de um férmion massivo e outro não massivo . . . . .	41
2.3.2	Caso II: Emissão de férmions não massivos . . . . .	42
2.4	Decaimento de Prótons e Nêutrons Uniformemente Acelerados: Perspectiva Inercial . . . . .	44
2.4.1	Decaimento $\beta^+$ e $\beta^-$ . . . . .	44
2.4.1.1	Resultados em 1+1 dimensões . . . . .	47
2.4.2	Comentário sobre Fatores de Forma e Simetrias em Interações Fortes . . .	48
2.5	Decaimento de Prótons e Nêutrons Uniformemente Acelerados: Perspectiva de Rindler . . . . .	49
3	OUTRAS APLICAÇÕES . . . . .	55
3.1	Detecção de partículas com $w < m$ . . . . .	55
3.2	Neutronização em estrelas de nêutrons . . . . .	60
	Conclusão . . . . .	63

	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>65</b>
	<b>APÊNDICES</b>	<b>69</b>
	<b>APÊNDICE A – FUNÇÕES ESPECIAIS E PROPRIEDADES</b> . . . .	<b>71</b>
	<b>APÊNDICE B – EQUAÇÃO DE DIRAC E MODOS NORMAIS EM UM ESPAÇO-TEMPO CLÁSSICO DE FUNDO</b>	<b>75</b>
	<b>ANEXOS</b>	<b>77</b>
<b>.1</b>	<b>Recomendação de Estudos sobre Pré-Requisitos</b> . . . . .	<b>79</b>



# Introdução

A primeira estimativa da influência de uma aceleração uniforme em processos de decaimento sob a perspectiva de campos gravitacionais foi dada em 1997 [5], demonstrando que o tempo de vida de algumas partículas poderia ser alterado e surpreendentemente que o decaimento  $p^+ \xrightarrow{a} n^0 e^+ \nu_e^*$  por prótons acelerados uniformemente seria possível - sendo a aceleração o responsável pelo fator energético para o processo ocorrer - do ponto de vista de observadores inerciais.

Apesar de construído por uma representação das partículas envolvidas em termos de campos escalares, i.e., com graus de liberdade internos desconsiderados, uma primeira interpretação do ponto de vista do Efeito Unruh pôde ser estabelecida: tratando o sistema de dois níveis do detector de Unruh-DeWitt [Seção (1.4)] como sendo constituído pelas energias de repouso de prótons e nêutrons de forma que o decaimento fosse compreendido como uma transição entre esses estados. Como apontado no trabalho, um tratamento mais adequado deveria levar em consideração todos os possíveis momentos finais das partículas emitidas, que ao serem integrados forneceriam a taxa total de decaimento.

Esse tratamento mais claro no sentido conceitual e analítico só foi traçado em [6], onde os pares de férmions emitidos foram representados corretamente através de campos fermiônicos, em um regime de baixas energias para interações fracas e com os bárions sendo descritos formalmente por uma corrente semi-clássica, com sua estrutura interna desprezada.

Em um referencial co-acelerado com o próton, o decaimento  $\beta^+$  (1.9) é proibido pelo princípio de conservação da energia no sistema: a energia do próton em repouso é menor que a soma das energias das partículas no estado final. Dessa forma, o tempo de meia vida do próton ( $\tau_p$ ), sendo um escalar de Lorentz, deveria ser o mesmo para referenciais inerciais e co-acelerados. Com o intuito de se determinar como um observador co-acelerado com o próton (representado através das coordenadas de Rindler) interpretaria esse resultado, Vanzella e Matsas demonstraram em [7] e [8], através de um *modelo bidimensional* e considerando a *massa de neutrinos* envolvidos como sendo *nula*, que para a equivalência entre a medida de  $\tau_p$  nos dois referenciais, o efeito Fulling-Davies-Unruh (FDU) deveria ser considerado: enquanto observadores inerciais no vácuo de Minkowski não podem detectar as partículas virtuais presentes, observadores com aceleração uniforme  $a$  se vêem imersos em um banho térmico com temperatura  $T_{FDU} = \frac{a\hbar}{2\pi ck_B} = \frac{a}{2,5 \times 10^{22} \text{cm/s}^2} \text{K}$

---

\*Esse tipo de notação descreve em geral processos de interesse em física de partículas. O lado esquerdo representa o estado inicial do sistema e o direito o final, após o espalhamento ou decaimento, por exemplo. O símbolo superior indica a carga da partícula, e o  $a$  sobre a seta de transição que o processo ocorre com a influência de uma aceleração uniforme; veja a Figura 3.

de partículas que agora são detectáveis - as chamadas *partículas de Rindler*. O processo de transição do próton para observadores de Rindler poderia ser descrito, então, como uma interação entre esse e os léptons do banho térmico através de um dos seguintes processos:

$$p^+ e^- \xrightarrow{a} n^0 \nu_e, \quad p^+ \bar{\nu}_e \xrightarrow{a} n^0 e^+ \quad \text{ou} \quad p^+ e^- \bar{\nu}_e \xrightarrow{a} n^0, \quad (1)$$

todos construídos através dos pressupostos básicos de que interações fracas só podem ser dadas com léptons e seus neutrinos respectivos (Figura 3), e que a carga elétrica e o número bariônico devam ser conservados [2].

Esses resultados refletiram primordialmente a necessidade de se considerar o efeito FDU para a consistência da própria teoria quântica de campos (TQC), e em paralelo, reforçaram que o conceito de vácuo dependeria do observador em consideração<sup>†</sup>: o vácuo de Minkowski presenciado pelos observadores inerciais não se reflete para os observadores de Rindler que agora se veem imersos em um banho térmico de partículas [9].

Posteriormente, uma análise analítica complementar através de um modelo  $4$ - $D$  considerando a massa de neutrinos como sendo *não nula* confirmou a equivalência entre os resultados medidos em ambos os referenciais [10].

Nesse contexto, este trabalho de conclusão de curso (TCC) tem como objetivo a revisão e compreensão dos resultados obtidos em [4]. Em especial, a compreensão da necessidade de se considerar o efeito Unruh para a consistência do cálculo do tempo de meia vida do próton em um referencial inercial e em um co-acelerado para o decaimento beta  $\beta^+$ . As notações e convenções utilizadas aqui são similares às apresentadas em [11], com o tensor métrico de Minkowski sendo representado por  $g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$  e o tensor totalmente anti-simétrico  $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$  de forma que  $\epsilon^{0123} = -1$ .

No Capítulo 1 alguns conceitos essenciais ao trabalho relacionados à fenomenologia de partículas, à escala de energia em que os decaimentos são descritos e a elementos do arcabouço em teoria quântica de campos em espaços curvos (com o tratamento todo ainda em Minkowski) são explorados.

No Capítulo 2 uma revisão detalhada do decaimento de férmions acelerados para observadores inerciais no contexto de TQC usual, i.e., no espaço-tempo de Minkowski, sob o enfoque dos decaimentos  $\beta^+$  e  $\beta^-$  é apresentada. Em seguida, a mesma análise é feita sob a perspectiva de referenciais co-acelerados com as partículas.

No Capítulo 3 o formalismo de correntes semi-clássicas é utilizado para se determinar a possível influência gravitacional em processos de resfriamento em estrelas de nêutrons, e a possível detecção de partículas com energia  $\omega \in [0, \infty)$  nas vizinhanças da Terra.

---

<sup>†</sup>Tendo, portanto, fortes implicações sobre o conteúdo de partículas elementares e sobre a realidade aparente de um observador físico, uma vez que os estados de diferentes partículas são construídos a partir da ação de operadores de criação sobre o estado de vácuo na linguagem de teoria quântica de campos.

Por fim, apesar de não ser o caso ideal, o anexo conta com referências de estudos para os pré-requisitos necessários à total compreensão do trabalho de revisão, de forma que o(a) leitor(a) possa identificar em que parte do texto talvez seja necessário se aprofundar mais.



## Parte I

# Teoria Quântica de Campos e Elementos em Física de Partículas



# 1 Teoria Quântica de Campos e Conceitos Iniciais

Para a compreensão dos trabalhos estudados, uma passagem será feita pelo regime de energias em que as interações fracas são consideradas e pelo significado dos fatores de forma nos acoplamentos entre léptons e bárions. Em seguida, dispendo de elementos em teoria quântica de campos em espaços curvos, uma base qualitativa importante para a compreensão dos efeitos semiclássicos junto do surgimento do fator térmico nos objetos dinâmicos da teoria serão apresentados.

## 1.1 Vácuo, Partículas e Simetrias do Espaço-Tempo

Dentre as formas em que uma tentativa de unificação entre a Teoria Quântica de Campos (TQC) e a Relatividade Geral (RG) pode ser apresetada, a Teoria Quântica de Campos em Espaços Curvos (TQCEC) é vista como uma aproximação semi-clássica: no sentido em que os campos gravitacionais são mantidos *clássicos*, enquanto que os campos de matéria com os quais esses interagem são *quantizados* [12].\* O regime de validade dessa abordagem é tão válido quanto maior sejam as distâncias e intervalos de tempo em relação às unidades de Planck para tempo e distância,

$$L_{Planck} = \left( \frac{G\hbar}{c^3} \right)^{1/2} = 1.616 \times 10^{-33} \text{ cm} \quad (1.1)$$

e

$$t_{Planck} = \left( \frac{G\hbar}{c^5} \right)^{1/2} = 5.39 \times 10^{-44} \text{ s}, \quad (1.2)$$

ambas definidas a partir da constante de Planck reduzida  $\hbar$ , da velocidade da luz  $c$  e da constante gravitacional  $G$ . Da mesma forma, também podem ser definidas unidades fundamentais de energia

$$E_{Planck} = \left( \frac{\hbar c^5}{G} \right)^{1/2} = 1.22 \times 10^{19} \text{ GeV} \quad (1.3)$$

e massa  $M_{Planck} = E_{Planck}/c^2$  [14]. Assim como as constantes  $\hbar$  e  $c$  introduziram uma rica e profunda física na virada do século XIX para o XX, espera-se que nessa escala de unidades fundamentais os efeitos de uma teoria de gravitação quântica devam ser considerados [15].

---

\*De fato, essa abordagem não é de maneira alguma nova ao longo do desenvolvimento da Física Moderna: em um primeiro momento em teoria de perturbação em Mecânica Quântica, por exemplo, os campos eletromagnéticos são tratados de maneira clássica, perturbando sistemas que possuem suas energias quantizadas [13].

Uma das primeiras diferenças entre TQC usual e TQCEC se dá sobre as *simetrias do espaço-tempo* em consideração e suas respectivas implicações. Na quantização de um campo escalar acoplado ao campo gravitacional [16], por exemplo, as construções de um estado de vácuo e Espaço de Fock não se dão da mesma maneira que em Minkowski, quando não há o acoplamento. Existe uma classe de coordenadas privilegiadas em Minkowski tal que a decomposição de um campo é evidenciada naturalmente: sendo o elemento de linha de Minkowski invariante sobre o grupo de Poincaré em um sistema de coordenadas retangular  $(t, x, y, z)$ ,  $\partial_t$ ,  $\partial_x$ ,  $\partial_y$  e  $\partial_z$  surgem como uma escolha natural para serem os *vetores de Killing* do espaço, de forma que os modos normais de expansão do campo escalar  $\phi(\mathbf{x})$  sejam soluções das equações  $\partial_t u_\omega = -i\omega u_\omega$  e  $\partial_{\mathbf{x}} u_{\mathbf{k}} = +i\mathbf{k}u_{\mathbf{k}}$  com autovalores  $-i\omega$ , e  $i\mathbf{k}$  tal que  $\omega > 0$ . Em termos de simetrias, a decomposição natural surge como uma consequência da invariância por translações temporais e espaciais.

Em um espaço-tempo curvo qualquer nem sempre existe uma decomposição natural dos campos quantizados, porém, sempre há uma relação entre os modos normais de ambos pelas *transformações de Bogoliubov* [12]. De maneira geral, sempre que houver uma simetria geométrica (isometria, ou simetria da métrica) em um espaço-tempo, existirá um *vetor de Killing*, sendo solução de uma equação de killing e gerador da isometria. Translações espaço-temporais e transformações de Lorentz são uma isometria do espaço tempo 4-D de Minkowski, por exemplo. Se a métrica  $g_{\mu\nu}$  é independente de uma coordenada  $x^p$ , considerando  $K = \partial_p$ , segue que  $K^\mu$  é o gerador da isometria; transformações nas quais há uma invariância métrica são expressas como um movimento infinitesimal na direção do vetor de killing correspondente [17].

Mas, em toda essa discussão sobre simetrias e decomposição de campos quantizados, qual seria, então, o conjunto de modos normais ideal para a descrição de um vácuo físico? Pela discussão acima fica claro que o próprio conceito de um vácuo perde seu caráter *global*. Diferente de TQC em que no formalismo LSZ [18] o estado de vácuo  $|0\rangle_{IN}$  após uma evolução do sistema será equivalente ao  $|0\rangle_{OUT}$ , em TQCEC a própria presença de um campo gravitacional externo dependente do tempo pode quebrar essa equivalência, no sentido de que partículas podem ser criadas. De outras maneiras, a criação de partículas pode ocorrer como uma consequência da expansão cósmica do Universo, e como será visto, através de uma aceleração uniforme para uma classe específica de observadores no espaço-tempo de Minkowski [12].

Os fenômenos físicos mais interessantes encontrados por TQCEC têm como ‘sonda’, ou objeto de teste, partículas pontuais. Desde a emissão de partículas na proximidade de Buracos Negros [19][20], revelando uma profunda relação entre a termodinâmica, relatividade geral e teoria quântica de campos, ao Efeito Unruh [21] (que demonstra que um observador acelerando no vácuo de Minkowski deve ver um ‘banho térmico’ de partículas) e a influência desse no decaimento de férmions acelerados [7] - objeto central de estudo



desse TCC - revelam um importante protagonista no formalismo semi-clássico: a física de partículas, bem compreendida pelo Modelo Padrão em TQC no espaço plano, serve como um ‘laboratório’ e hábil indicador de implicações mais profundas para a natureza quântica da gravidade. †

## 1.2 Interações Fracas e o Regime de Fermi

Uma descrição precisa da teoria eletrofraca é dada apenas no contexto do Modelo Padrão. Não obstante, em processos de espalhamento e decaimento em que a energia do centro de massa ( $E_{CM}$ ) das partículas envolvidas, ou a transferência de momentos, é muito menor que a massa dos bósons  $W^\pm$  e  $Z$ , trabalha-se no chamado ‘regime de Fermi’, ou no regime de aproximações do Modelo Padrão para baixas energias [1].

Como um exemplo de uma teoria efetiva no contexto de baixas energias, um modelo simplificado (*toy model*) pode ser considerado para um campo fermiônico de Dirac  $\Psi$ , com Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(i\partial - m)\Psi - G(\bar{\Psi}\Psi)^2, \quad (1.4)$$

sendo  $G$  uma constante de acoplamento,  $\partial = \gamma^\mu \partial_\mu$  e  $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0$ , com  $\gamma^\mu$  as matrizes gamma usuais. Em *tree level* (nível de árvore) a amplitude de espalhamento do processo  $f\bar{f} \rightarrow f\bar{f}$  calculada através das regras de Feynman [2] usuais é dada por

$$i\mathcal{M}_{f\bar{f} \rightarrow f\bar{f}} = iG[\bar{v}(p_1)u(p_2)\bar{u}(p'_2)v(p'_1)], \quad (1.5)$$

com  $\bar{v}$  e  $u$  sendo as funções de onda do férmion e anti-férmion iniciais com momento  $p_1$  e  $p_2$ , respectivamente, e  $v$  e  $\bar{u}$  a função de onda das partículas finais com seus respectivos momentos. Imediatamente, o resultado poderia ser comparado com o de uma teoria em que o férmion se acoplaria a um campo escalar e real  $\phi$  de massa  $M$  através de uma constante de acoplamento  $g$ . A ação e amplitude de espalhamento para o processo investigado acima nessa teoria seriam, respectivamente,

$$S = \int d^4x \left[ \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - \frac{1}{2} M^2 \phi^2 + \bar{\Psi}(i\partial - m)\Psi - g\phi\bar{\Psi}\Psi \right] \quad (1.6)$$

e

$$i\mathcal{M}_{f\bar{f} \rightarrow f\bar{f}} = (-ig)^2 \frac{i}{p^2 - M^2} [\bar{v}(p_1)u(p_2)\bar{u}(p'_2)v(p'_1)], \quad (1.7)$$

ou

$$i\mathcal{M}_{f\bar{f} \rightarrow f\bar{f}} = i \frac{g}{M^2 - E_{cm}^2} [\bar{v}(p_1)u(p_2)\bar{u}(p'_2)v(p'_1)], \quad (1.8)$$

---

†Existe uma discussão na literatura a respeito de possíveis implicações quando não utilizam-se sondas pontuais: em trabalhos recentes a respeito da influência do Efeito Unruh, por exemplo, resultados sobre corpos estendidos e uniformemente acelerados têm sido exploradas [22] (imaginando a situação com diferentes detectores de Unruh conectados *causalmente no espaço-tempo*, por exemplo, em uma cadeia de spins pela informação de seu alinhamento com campos magnéticos). Não obstante, uma resposta definitiva talvez pudesse ser alcançada observando a influência do próprio Efeito Unruh sobre fenômenos de transição de fase em matéria condensada.

sendo possível verificar que ambas as teorias são comparáveis para baixas energias, i.e.,  $p = (p_1 + p_2) = E_{CM} \ll M$  e  $G = g^2/M^2$  (Figura 1).

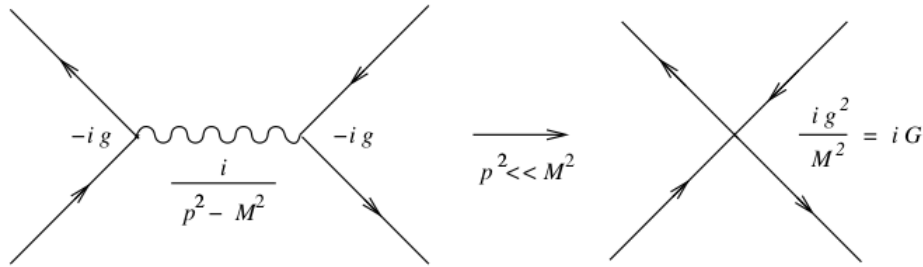


Figura 1 – Diagrama representativo da equivalência entre as duas teorias no regime de baixas energias. O diagrama à esquerda representa a amplitude de espalhamento (1.8) e o à direita, (1.5). Fonte: [1].

De uma maneira similar o interesse no capítulo 2 será dado sobre o regime de baixas energias para a análise dos decaimentos  $\beta^+$  e  $\beta^-$ :

$$p^+ \xrightarrow{\alpha} n^0 e^+ \nu_e \quad \text{e} \quad n^0 \xrightarrow{\alpha} p^+ e^- \bar{\nu}_e, \quad (1.9)$$

com prótons e nêutrons sendo acelerados uniformemente.

### 1.3 Fatores de Forma

Sendo prótons e nêutrons partículas com estrutura interna, em nível de árvore o acoplamento fundamental entre o mediador  $W$  e esses sofre uma influência não trivial da interação forte entre quarks e glúons. Essa influência pode produzir alterações sobre a constante de acoplamento  $g_w$  e, portanto, à *carga fraca*, de forma a implicar em uma não conservação dessa em alguns vértices dos diagramas - diferente da constante de acoplamento na eletrodinâmica quântica. Dessa forma, os fatores de vértice da teoria serão descritos como

$$\frac{ig_w}{2\sqrt{2}} \gamma^\mu (C_V - C_A \gamma^5), \quad (1.10)$$

com  $C_V$  e  $C_A$  (os chamados *fatores de forma*) sendo as correções vetoriais e axiais à constante de acoplamento fraca  $g_w$  devido à essa interação, ambas determinadas experimentalmente [2].

Ainda que em um nível mais fundamental a interação para o decaimento  $\beta^-$  *inerencial* no vértice bariônico seja, então, descrita por processos entre quarks [Figura 2, diagrama i)], para o modelo de correntes semi-clássicas e intervalo de energia considerado a estrutura interna dos bárions será desprezada - em nível diagramático essa aproximação é representada pela mancha cinza em [Figura 2, diagrama ii)], se acoplando o vértice bariônico diretamente ao leptônico [Figura 2, diagrama iii)]. Nesse panorama, no capítulo

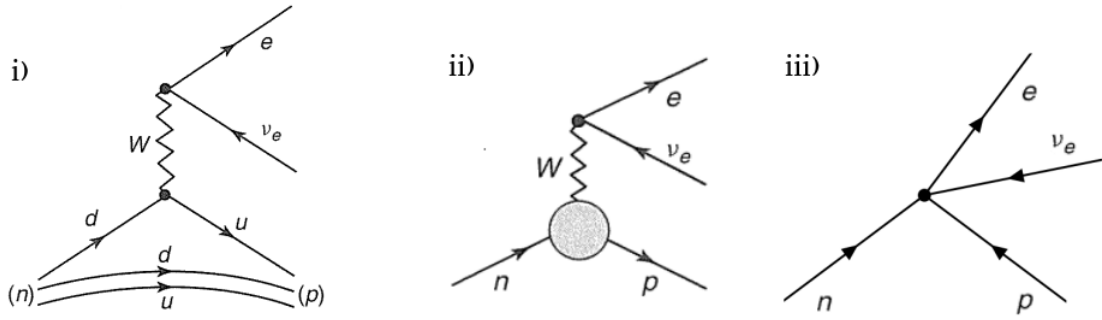


Figura 2 – Diagramas de Feynman para o decaimento  $\beta^-$ : i) representação mais fundamental em termos da estrutura interna dos bárions; ii) representação simplificada com bárions sendo tratados como partículas pontuais; iii) representação de um acoplamento direto no regime de Fermi. Fonte: Adaptada de [2].

2 os fatores de forma  $C_V$  e  $C_A$  serão iguais a 1 no vértice leptônico<sup>‡</sup>. Na literatura de simetrias discretas em física de partículas, o primeiro valor está relacionado com a hipótese de conservação da corrente vetorial (CVC) e o segundo com a hipótese de conservação parcial de correntes axiais (PCAC) [2] §.

Futuramente, no decaimento  $\beta^+$  para observadores co-acelerados, os fatores serão escolhidos como  $C_V = 1$  e  $C_A = 0$ , remontando aos primórdios da teoria de interações fracas de Fermi. A escala de energia típica da teoria eletrofraca é de  $\mathcal{O}(100) \text{ GeV}$ , de forma que para baixas energias em relação a esse valor, a contribuição dominante provém das interações fortes e eletromagnéticas [1].

## 1.4 Detectores de Unruh-DeWitt

Um bom exemplo<sup>¶</sup> para demonstrar a presença de um fator térmico na detecção de partículas vista por um observador acelerado consiste em considerar o modelo ‘simples’ de detectores de Unruh-DeWitt [24]: a transição do detector entre dois níveis de energia é sempre acompanhado da transição do campo que esse interage para um estado excitado  $|\psi\rangle$ . O detector, seguindo um linha de mundo geral  $x(\tau)$ , com  $\tau$  seu tempo próprio, possui dois estados de energia acessíveis,  $E$  e  $E_0$ , tal que  $E > E_0$ , e se acopla a um campo escalar  $\phi$  (inicialmente no vácuo de Minkowski  $|0_M\rangle$ ) através de um termo de monopolo do detector  $m(\tau)$  na interação:

$$\mathcal{L}_{int} = cm(\tau)\phi[x(\tau)] , \quad (1.11)$$

<sup>‡</sup>Ressalta-se que a estrutura ‘ $V - A$ ’, i.e., a diferença entre um termo vetorial e axial, responsável pela violação de paridade nas interações fracas, leva em consideração o fato de que temos estados de quiralidade ‘left-handed’ e ‘right-handed’ de férmions e anti-férmions, respectivamente [23], de forma que esses objetos não entram de forma simétrica na teoria.

<sup>§</sup>Para implicações dessas conservações no âmbito de interações fortes, ver “*Complement: Isospin and Flavor SU(3)*” em [1], capítulo 8.

<sup>¶</sup>O tratamento será dado seguindo a linha de [12]. Uma versão simplificada, porém, mais detalhada, pode ser encontrada em [24].

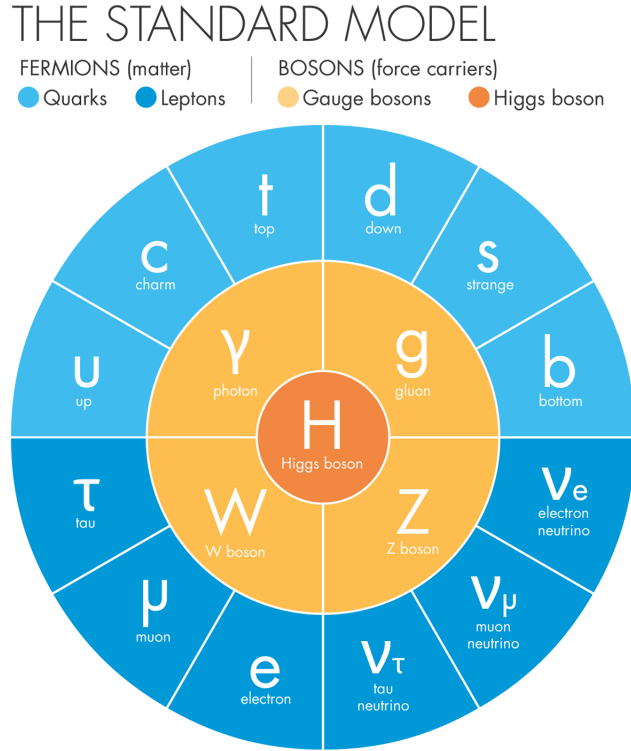


Figura 3 – Tabela ilustrativa de todas as partículas e mediadores de força descobertos pelo modelo padrão. Um interessante diagrama interativo se encontra em [Symmetry Magazine](#). As notações de processos em partículas será feita com base na nomenclatura empregada aqui. Fonte: Lucy-Reading-Ikkanda for Quanta Magazine.

com  $c$  uma constante de acoplamento pequena (no sentido de uma teoria de perturbação). A amplitude de transição de  $E_0$  para  $E$  em teoria de perturbação de primeira ordem é dada pela regra de ouro de Fermi [13] por

$$\mathcal{A}_{E_0 \rightarrow E} = ic \langle E, \psi | \int_{-\infty}^{+\infty} m(\tau) \phi[x(\tau)] |0_M, E_0 \rangle. \quad (1.12)$$

Pela quantização do campo escalar em 3+1 dimensões, a expansão do campo escalar em termos dos modos normais de Klein Gordon  $u_{\mathbf{k}} = (2\omega (2\pi)^3)^{-1/2} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t}$  é dada por  $\phi(x) = \sum_{\mathbf{k}} [a_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{x}) + a_{\mathbf{k}}^\dagger u_{\mathbf{k}}^*(t, \mathbf{x})]$  [12], dessa forma, apenas transições para o estado  $a_{\mathbf{k}}^\dagger |0_M\rangle = |1_{\mathbf{k}}\rangle$  irão sobreviver em (1.12). Pela evolução temporal de  $m(\tau) = \exp(iH_0\tau)m(0) \times \exp(-iH_0\tau)$  com  $H_0 |E\rangle = E |E\rangle$ , sendo  $H_0$  a hamiltoniana do detector, a amplitude de transição pode ser reescrita como

$$\mathcal{A}_{E_0 \rightarrow E} = ic \langle E | m(0) | E_0 \rangle \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(E-E_0)\tau} \langle \psi | \phi(x) | 0_M \rangle d\tau, \quad (1.13)$$

com

$$\begin{aligned} \langle 1_{\mathbf{k}} | \phi(x) | 0_M \rangle &= \int d^3k' (16\pi^3\omega')^{-1/2} \langle 1_{\mathbf{k}} | a_{\mathbf{k}'}^\dagger | 0_M \rangle e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x} + i\omega't} = \\ &= (16\pi^3\omega)^{-1/2} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + i\omega t}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

na passagem do contínuo para o discreto e notando que os estados são ortonormalizados, de forma que

$$\mathcal{A}_{E_0 \rightarrow E} = ic \langle E | m(0) | E_0 \rangle \left( 16\pi^3 \omega \right)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(E-E_0)\tau} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + i\omega t} d\tau. \quad (1.15)$$

A amplitude de transição obtida é válida para qualquer linha de mundo que o detector venha a percorrer no espaço-tempo. Por motivos de organização, a análise dessa pode ser separada para o caso em que não há aceleração (caso I) e para o caso de acelerações uniformes (caso II).

### 1.4.1 Caso I: Trajetórias não aceleradas

Uma linha de mundo inercial analisada com base no tempo próprio do detector é dada por

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}t = \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}\tau\gamma, \quad (1.16)$$

com  $|\mathbf{x}_0|$  e  $|\mathbf{v}|$  constantes,  $v = |\mathbf{v}| < 1$  e  $\sqrt{1-v^2} = \gamma$  o fator gama usual de Lorentz em unidades naturais. A amplitude de transição nesse caso pode ser reescrita através de uma transformada de Fourier como

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{E_0 \rightarrow E} &= ic \left( 16\pi^3 \omega \right)^{-1/2} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_0} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(E-E_0)\tau} e^{i\tau(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})\gamma} = \\ &= ic (4\omega)^{-1/2} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_0} \delta(E - E_0 + (\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})\gamma). \end{aligned} \quad (1.17)$$

Sendo  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} \leq |\mathbf{k}||\mathbf{v}| < \omega$  e  $E > E_0$ , o argumento da distribuição delta de Dirac é positivo, de forma que a transição  $E \rightarrow E_0$  é proibida. Em qualquer processo de transição, as amplitudes são construídas com base no princípio de conservação de energia do processo [2], termo usualmente representado pelo argumento na distribuição. Dessa forma, a proibição dessa transição surge como consequência das simetrias do espaço-tempo: o grupo de Poincaré garante através da invariância por translações temporais que a energia do sistema seja conservada.

Em uma situação mais geral, alguém poderia se perguntar sobre a probabilidade de transição  $\mathcal{P}_{i \rightarrow f} = |\mathcal{A}_{E_0 \rightarrow E}|^2$  para todas energias  $E$  possíveis e respectivos estados  $|\psi\rangle$ . Essa probabilidade, dada por

$$\mathcal{P}_{i \rightarrow f} = c^2 \sum_E |\langle E | m(0) | E_0 \rangle|^2 \mathcal{F}(E - E_0) = \mathcal{T}_{selet} \mathcal{F}(E - E_0), \quad (1.18)$$

com a soma sobre o conjunto completo de autovetores  $|\psi\rangle$  no espaço de Hilbert de  $H_0$ , tem em  $\mathcal{T}_{selet}$  um termo de seletividade às transições, dependendo inteiramente da estrutura interna do detector em si, enquanto que

$$\mathcal{F}(E - E_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau' e^{-i(E-E_0)(\tau-\tau')} G^+(x(\tau), x(\tau')) \quad (1.19)$$

independe das informações do detector, representando o “banho de partículas” que o detector presencia em função de seu movimento [12]. As funções  $G^\pm(x, x')$  são as chamadas funções de Wightman [12][18] e são definidas através do valor esperado dos campos no vácuo como

$$G^+(x, x') = \langle 0_M | \phi(x) \phi(x') | 0_M \rangle \text{ e } G^-(x, x') = \langle 0_M | \phi(x') \phi(x) | 0_M \rangle, \quad (1.20)$$

aparecendo no propagador de Feynman [1], por exemplo, como:

$$iG_F(x, x') = \langle 0_M | T(\phi(x) \phi(x')) | 0_M \rangle = \Theta(t - t') G^+(x, x') + \Theta(t' - t) G^-(x, x'), \quad (1.21)$$

com as funções de Heaviside  $\Theta(t)$ [25].

Para uma trajetória mais geral da forma  $G^+(x(\tau), x(\tau')) = G^+(\Delta\tau) = G^+(\tau - \tau')$  (com o intuito do sistema ainda ser invariante sobre translações temporais) considera-se a seguinte situação de equilíbrio entre o detector e o campo  $\phi$ : o número de quanta absorvido pelo detector por unidade de tempo próprio  $\tau$  é constante. Se essa constante for zero, têm-se o caso trivial de que nenhuma partícula é encontrada pelo detector. Caso contrário,  $\mathcal{P}_{if} \rightarrow +\infty$  já que em (1.18) o intervalo temporal de integração é infinito:

$$\mathcal{F}(E - E_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} d(\Delta\tau) e^{-i(E-E_0)\Delta\tau} G^+(\Delta\tau) \quad (1.22)$$

Existem duas formas possíveis de se contornar esse problema: a primeira sendo um desligamento adiabático do acoplamento (1.11) com  $\tau \rightarrow \pm\infty$  e a segunda se definindo a probabilidade de transição por unidade de tempo próprio

$$\mathcal{P}_{E_0 \rightarrow E} = \frac{\mathcal{P}_{i \rightarrow f}}{\mathcal{T}} = c^2 \sum_E |\langle E | m(0) | E_0 \rangle|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} d(\Delta\tau) e^{-i(E-E_0)\Delta\tau} G^+(\Delta\tau) \quad (1.23)$$

com  $T := \delta(0) 2\pi$ .

No caso mais simples em que o detector se acopla a um campo escalar e sem massa  $\phi$ , a função de Wightman será dada por [12]:

$$\mathcal{D}^+(x, x') = -\frac{1}{4\pi^2 [(t - t' - i\epsilon)^2 - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2]}. \quad (1.24)$$

Com a trajetória inercial (1.16), o propagador obtido pela expressão (1.24) é dado por  $\mathcal{D}^+(\Delta\tau) = -1/(4\pi^2 (\Delta\tau - i\epsilon')^2)$ , com  $\epsilon' = \epsilon\gamma := \epsilon$  entendido como uma translação do polo no plano complexo em relação ao eixo real de integração em  $\Delta\tau$ , e tendo seu limite tomado para 0 ao fim dos cálculos. Voltando em (1.23), a probabilidade de transição pode ser calculada utilizando-se integração de contorno no plano complexo: pelo lema de Jordan, o contorno escolhido é o semi-círculo inferior no plano  $\Delta\tau$  (já que  $E > E_0$ ); como o polo  $\Delta\tau = i\epsilon$  está no semi-círculo superior, pelo teorema de Cauchy a integração resulta em 0 [26][27], de forma que partículas ainda não são detectadas por um detector seguindo uma trajetória inercial, mesmo que deixando ‘livre’ o critério de seleção em função da energia  $E$  das partículas.

### 1.4.2 Caso II: Trajetórias aceleradas uniformemente

Com uma aceleração uniforme própria  $\alpha^{-1}$ , o detector no quadrante de Rindler direito poderia ser considerado, por exemplo, descrevendo uma hipérbole no plano  $(t, z)$  com

$$x = y = 0, \quad z = \sqrt{t^2 + \alpha^2}, \quad (1.25)$$

e  $t = \alpha \sinh(\tau/\alpha)$ . Nesse caso, a função de Wightman (1.24) pode ser reescrita utilizando as coordenadas em Rindler como

$$\mathcal{D}^+(\Delta\tau) = -\frac{1}{16\pi^2\alpha^2 \sinh^2\left(\frac{\tau-\tau'}{2\alpha} - \frac{i\epsilon}{\alpha}\right)}. \quad (1.26)$$

com as funções hiperbólicas do termo  $[(t-t'-i\epsilon)^2 - |\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^2]$  reunidas através das propriedades (A.3), (A.8) e (A.10); por fim, funções de  $\tau$  e  $\tau'$  são absorvidas no fator de  $\epsilon$ . Com o auxílio da expressão em séries da função [12]

$$\frac{1}{\sin^2(\pi x)} = \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (x-k)^{-2}, \quad (1.27)$$

o propagador pode ser reescrito como <sup>||</sup>

$$\mathcal{D}^+(\Delta\tau) = -\frac{1}{4\pi^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\Delta\tau - 2i\epsilon + 2i\pi\alpha k)^{-2}. \quad (1.28)$$

Sendo a nova probabilidade de transição expressa em termos de

$$\mathcal{P}_{E_0 \rightarrow E} = -\frac{c^2}{(2\pi)^2} \sum_E |\langle E|m(0)|E_0\rangle|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} d(\Delta\tau) \frac{e^{-i(E-E_0)\Delta\tau}}{(\Delta\tau - 2i\epsilon + 2i\pi\alpha k)^2}, \quad (1.29)$$

vários pontos devem ser ressaltados para sua solução: tomando o limite de  $\epsilon \rightarrow 0$  e realizando uma integral de contorno\*\*,

$$\mathcal{P}_{E_0 \rightarrow E} = \frac{c^2}{(2\pi)^2} \sum_E |\langle E|m(0)|E_0\rangle|^2 (2\pi) (E - E_0) \sum_{k=1}^{\infty} e^{-2\pi\alpha k(E-E_0)}, \quad (1.30)$$

notando que apenas os termos com  $|k| > 0$  possuem uma contribuição não nula pelo Lemma de Jordan [26], tendo em vista que o contorno é um círculo no plano inferior de  $\Delta\tau$  com orientação anti-horária. Finalmente, sendo o termo resultante uma série geométrica,

$$\mathcal{P}_{E_0 \rightarrow E} = \frac{c^2}{2\pi} \sum_E \frac{|\langle E|m(0)|E_0\rangle|^2 (E - E_0)}{e^{2\pi\alpha(E-E_0)} - 1} \quad (1.31)$$

com a condição de convergência obedecida já que  $E > E_0$  e  $\alpha > 0$ . O fator de Planck (ou fator térmico)  $[e^{2\pi\alpha(E-E_0)} - 1]$  indica que o observador uniformemente acelerado deverá

<sup>||</sup>O fator  $2\pi\alpha$  é proveniente de (1.26), com  $\pi$  aparecendo ao se multiplicar identicamente ambos os termos do argumento de  $\sinh$  e depois dividi-los igualmente. A diferença no sinal em (1.28) surge da relação  $\sinh x = -i \sin ix$ .

\*\*Notando que o integrando converge uniformemente, de forma que a ordem entre integração e soma podem ser trocadas [26].

presenciar uma radiação térmica mesmo que o campo em que o detector esteja acoplado se encontre no vácuo para observadores inerciais. Outro resultado interessante de se mostrar é que a função de Green no vácuo para o detector uniformemente acelerado é exatamente a mesma que a função de Green termal para um detector inercial [12], porém, por brevidade, cálculos semelhantes não serão resolvidos aqui.



## Parte II

### Aplicações no Regime Semi-Clássico



## 2 Decaimento de Férmions Uniformemente Acelerados

### 2.1 Correntes Semi-Clássicas e Condições de Validade

Considera-se uma partícula descrevendo uma linha de mundo  $x^\mu(\tau)$  com tempo próprio  $\tau \in \mathbb{R}$ . Essa pode ser descrita através da densidade de corrente vetorial *clássica*

$$j^\mu(x) = q \frac{\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}(\tau))}{u^0(\tau) \sqrt{-g}} u^\mu(\tau), \quad (2.1)$$

independente de um sistema de coordenadas (assegurado pelo fator do produto  $u^0(\tau) \sqrt{-g}$ , com  $g = \det g_{\mu\nu}$ ), com  $u^\mu(\tau)$  sendo sua quadri-velocidade no ponto  $x^\mu(\tau)$  e  $q$  a carga total medida em um referencial em repouso com a mesma. Essa representação é adequada para partículas com graus de liberdade interno que possam ser desconsiderados e trajetórias bem definidas, como no caso de elétrons no LEP com seu acoplamento com o campo magnético de fundo ignorado [4].

Para processos de desintegração, como  $p \xrightarrow{a} n^0 e^+ \nu_e$ , através do processo de quantização usual o observável clássico  $q$  é promovido ao operador  $\hat{q}_0(\tau)$  que na representação de Heisenberg pode ser expresso como  $\hat{q}(\tau) = e^{i\hat{H}_0\tau} \hat{q}_0 e^{-i\hat{H}_0\tau}$ , com  $\hat{q}_0 : \mathcal{H}_{pn} \rightarrow \mathcal{H}_{pn}$  um operador auto-adjunto definido no espaço de Hilbert do sistema  $(p, n)$  de forma que o objeto próton-nêutron\* seja descrito como um sistema de dois níveis [Seção (1.4)], com sua Hamiltoniana própria  $\hat{H}_0$  tal que

$$\hat{H}_0 |n\rangle = m_n |n\rangle, \quad \hat{H}_0 |p\rangle = m_p |p\rangle, \quad (2.2)$$

sendo  $m_n$  e  $m_d$  as massas de repouso do nêutron e próton, respectivamente. Para um processo mais geral,  $P_i \rightarrow P_f f_1 \bar{f}_2^\dagger$ , tem-se que

$$\hat{j}^\mu(x) = \hat{q}(\tau) \frac{\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}(\tau))}{u^0(\tau) \sqrt{-g}} u^\mu(\tau), \quad (2.3)$$

e em especial

$$j_{P_i \rightarrow P_f}^\mu := \langle P_f | \hat{j}^\mu | P_i \rangle = G_{ef} e^{i(M_f - M_i)\tau} \frac{\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}(\tau))}{u^0(\tau) \sqrt{-g}} u^\mu(\tau), \quad (2.4)$$

\*Ou *núcleon*, como entendido primeiramente por Heisenberg no contexto da invariância do grupo de simetria SU(2) em interações fortes [[2], seção (4.3)].

†Como explicitado anteriormente, essa notação indica um decaimento em física de partículas: a partícula inicial  $P_i$  sofre uma transição para a partícula final  $P_f$  emitindo um férmion  $f_1$  e um anti-férmion  $\bar{f}_2$ .

com  $G_{ef} = \left| \langle P_f | \hat{q}_0 | P_i \rangle \right|$  sendo uma *constante de acoplamento efetiva*, similar à constante de *Fermi*. A corrente vetorial (2.3) é uma corrente *semi-clássica*: clássica no sentido da linha de mundo do sistema próton-nêutron ser conhecida e quântica pois essa é tratada como um sistema de dois níveis, com autoestados  $|n\rangle$  e  $|p\rangle^\dagger$  [24].

A descrição de partículas aceleradas através de correntes semi-clássicas é válida contanto que os seguintes pontos sejam respeitados:

1. *Os graus de liberdade internos da partícula considerada são desprezados;*
2. *A linha de mundo dessa partícula, e de pelo menos uma das partículas no estado final, deve ser bem definida;*
3. *A emissão de um número pequeno de partículas  $f_m$  deve ser tal que a quadri-velocidade de  $P_f$  não seja alterada significativamente com relação à de  $P_i$ .*

A condição 3, chamada de *condição de não-recuo*, é válida quando os momentos das partículas  $f_m$  emitidas ( $\mathbf{k}_f$ ) no referencial instantaneamente em repouso com  $P_i$  no momento de desintegração satisfazem

$$|\mathbf{k}_f| < \omega_f \ll M_{P_i}, M_{P_f} \quad \text{ou} \quad a_i \ll M_{P_i}, M_{P_f}, \quad (2.5)$$

com  $\omega_f$  sendo a energia típica das partículas emitidas,  $a_i$  a aceleração própria da corrente (2.3) que possui mesma ordem de grandeza de  $\omega_f$ , e  $M_{P_i}$  e  $M_{P_f}$  as massas de repouso das partículas  $P_i$  e  $P_f$ . Essa condição ficará mais clara assim que as distribuições em energias das partículas emitidas forem analisadas na Seção (2.4.1). No contexto das interações fracas, deve-se ressaltar que a condição é necessária para se garantir que a aproximação no regime de Fermi seja válida [Seção (1.2)].

## 2.2 Emissão de pares $\bar{f}f$

A partir do conceito de correntes semi-clássicas definida anteriormente, será de interesse representar decaimentos de partículas aceleradas do tipo  $P_i \rightarrow P_f f_1 \bar{f}_2$  com a corrente (2.3) representando o sistema  $(P_i, P_f)$ . O tratamento nessa seção tem como fonte principal a dedução apresentada em [4].

Antes das amplitudes de transição e outros objetos de interesse serem explorados, será útil lembrar aqui de normalizações e definições por motivos de notação. Os férmions emitidos são representados pelos campos espinoriais

$$\hat{\Psi}(x) = \sum_{s=\pm} \int d^3\mathbf{k} \left[ \hat{b}_{\mathbf{k}s} \psi_{\mathbf{k}s}^{(+\omega)}(x) + \hat{d}_{\mathbf{k}s}^\dagger \psi_{-\mathbf{k}-s}^{(-\omega)}(x) \right], \quad (2.6)$$

---

<sup>‡</sup>De maneira similar, essa abordagem semi-clássica sob uma perspectiva de campos é traduzida com os campos leptônicos (e de outras partículas de interesse no processo físico) sendo quantizados no espaço-tempo *clássico* de fundo.

com  $s$  representando as possíveis polarizações (estados de spin de férmions  $f$  e anti-férmions  $\bar{f}$ ). Os operadores de destruição de  $f$  e criação de  $\bar{f}$  são respectivamente,  $\hat{b}_{\mathbf{k}s}$  e  $\hat{d}_{\mathbf{k}s}^\dagger$  - da mesma forma os de criação de  $f$  e destruição de  $\bar{f}$  são dados pelos respectivos adjuntos.

Os quadri-momentos são dados por  $k^\mu = (\omega, \mathbf{k}) = (\omega, k^x, k^y, k^z)$  com *energia* =  $\omega = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2} > 0$ , sendo  $m$  a massa da partícula em consideração.

As soluções da equação de Dirac  $i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_{\mathbf{k}s}^{(\pm\omega)} - m\psi_{\mathbf{k}s}^{(\pm\omega)} = 0$  de frequências positivas e negativas (com relação ao campo de Killing inercial  $\partial_t$  e a representação de Dirac das matrizes  $\gamma^\mu$  [Seção (B)]) com spin *up* e *down* são dadas, respectivamente, por

$$\psi_{\mathbf{k}+}^{(\pm\omega)}(x) = \frac{e^{-i(\pm\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}}{\sqrt{16\pi^3\omega(\omega \pm m)}} \begin{bmatrix} m \pm \omega \\ 0 \\ k^z \\ k^x + ik^y \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

e

$$\psi_{\mathbf{k}-}^{(\pm\omega)}(x) = \frac{e^{-i(\pm\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}}{\sqrt{16\pi^3\omega(\omega \pm m)}} \begin{bmatrix} 0 \\ m \pm \omega \\ k^x - ik^y \\ -k^z \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

As constantes de normalização são definidas de forma [veja, [18], seção (2.2), e Apêndice (B)] que o produto interno

$$\left\langle \psi_{\mathbf{k}s}^{(\pm\omega)}, \psi_{\mathbf{k}'s'}^{(\pm\omega')} \right\rangle := \int_{\Sigma} d\Sigma_\mu \bar{\psi}_{\mathbf{k}s}^{(\pm\omega)} \gamma^\mu \psi_{\mathbf{k}'s'}^{(\pm\omega')} = \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta_{ss'} \delta_{\pm\omega, \pm\omega'} \quad (2.9)$$

seja obedecido, onde  $\bar{\psi} := \psi^\dagger \gamma^0$  e  $d\Sigma_\mu = \eta_\mu d\Sigma$ , com  $\Sigma$  uma hiper-superfície do tipo espaço arbitrária (aqui com  $t = \text{constante}$ ) representando uma superfície de Cauchy globalmente hiperbólica no espaço-tempo e  $\eta_\mu$  um campo vetorial ortogonal à  $\Sigma$  apontando sempre para o futuro<sup>§</sup>. Consequentemente, os operadores  $\hat{b}_{\mathbf{k}s}$  e  $\hat{d}_{\mathbf{k}s}^\dagger$  obedecem as relações de anti-comutação usuais - junto com seus respectivos conjugados hermitianos -

$$\{\hat{b}_{\mathbf{k}s}, \hat{b}_{\mathbf{k}'s'}^\dagger\} = \{\hat{d}_{\mathbf{k}s}, \hat{d}_{\mathbf{k}'s'}^\dagger\} = \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta_{ss'} \quad (2.10)$$

e

$$\{\hat{b}_{\mathbf{k}s}, \hat{b}_{\mathbf{k}'s'}\} = \{\hat{d}_{\mathbf{k}s}, \hat{d}_{\mathbf{k}'s'}\} = \{\hat{b}_{\mathbf{k}s}, \hat{d}_{\mathbf{k}'s'}^\dagger\} = \{\hat{b}_{\mathbf{k}s}, \hat{d}_{\mathbf{k}'s'}\} = 0. \quad (2.11)$$

No âmbito do Regime de Fermi, os campos fermiônicos são acoplados *minimalmente* com a corrente  $\hat{j}^\mu$  de forma que a ação efetiva de interação seja dada por

$$\hat{S}_I = \int d^4x \hat{j}_\mu \left\{ \hat{\Psi}_1 \gamma^\mu (C_V - C_A \gamma^5) \hat{\Psi}_2 + \hat{\Psi}_2 \gamma^\mu (C_V - C_A \gamma^5) \hat{\Psi}_1 \right\}, \quad (2.12)$$

<sup>§</sup>Essa condições são tais que o problema de Cauchy para solução das equações diferenciais parciais de Dirac sejam resolvidas unicamente dadas as condições iniciais em cada foliação de  $t$ . Uma definição mais precisa pode ser encontrada em [28].

e a amplitude de transição nos processos de decaimento de interesse por

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2}^{s_1 s_2} &= \left( \langle P_f | \otimes \langle f_{1\mathbf{k}_1 s_1}, \bar{f}_{2\mathbf{k}_2 s_2} | \right) \hat{S}_I(|0\rangle \otimes |P_i\rangle) = \\ &= \int d^4 x j_\mu^{(P_i \rightarrow P_f)} \bar{\psi}_{\mathbf{k}_1 s_1}^{(+\omega_1)} \gamma^\mu (C_V - C_A \gamma^5) \psi_{-\mathbf{k}_2 - s_2}^{(-\omega_2)}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

com apenas o primeiro termo em (2.12) contribuindo para os valores esperados.

A probabilidade diferencial de transição

$$\frac{d^6 \mathcal{P}^{P_i \rightarrow P_f}}{d^3 \mathbf{k}_1 d^3 \mathbf{k}_2} = \sum_{s_1 = \pm} \sum_{s_2 = \pm} \left| \mathcal{M}_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2}^{s_1 s_2} \right|^2 = \int d^4 x \int d^4 x' J_{\mu\nu}^{P_i \rightarrow P_f}(x, x') G_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2}^{\mu\nu}(x, x'), \quad (2.14)$$

é obtida ao se somar sobre todos os estados de spin finais possíveis o módulo ao quadrado da amplitude (2.13). Ressalta-se a não aparição de um termo  $(2s+1)^{-1}$  provindo da média sobre as configurações de spin da partícula em decaimento e um respectivo somatório sobre os estados de spin iniciais possíveis devido às condições mencionadas na Seção (2.1) sobre os graus de liberdade internos de  $P_i$  serem desconsiderados. O mesmo se aplica a um somatório de estados finais possíveis de  $P_f$ . Utilizando as expressões (2.3) e (2.4) para o espaço-tempo de Minkowski

$$\begin{aligned} J_{\mu\nu}^{P_i \rightarrow P_f}(x, x') &= j_\mu^{P_i \rightarrow P_f}(x) j_\nu^{P_f \rightarrow P_i}(x') = \\ &= G_{ef}^2 \frac{u_\mu(\tau) u_\nu(\tau')}{u^0(\tau) u^0(\tau')} e^{i\Delta M(\tau - \tau')} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}(\tau)) \delta^3(\mathbf{x}' - \mathbf{x}(\tau')), \end{aligned} \quad (2.15)$$

com  $\Delta M = M_f - M_i$  e

$$\begin{aligned} G_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2}^{\mu\nu}(x, x') &= \sum_{s_1 = \pm} \sum_{s_2 = \pm} \left\{ \bar{\psi}_{\mathbf{k}_1 s_1}^{(+\omega_1)}(x) \gamma^\mu (C_V - C_A \gamma^5) \psi_{-\mathbf{k}_2 - s_2}^{(-\omega_2)}(x) \right. \\ &\quad \left. \times \bar{\psi}_{-\mathbf{k}_2 - s_2}^{(-\omega_2)}(x') \gamma^\nu (C_V - C_A \gamma^5) \psi_{\mathbf{k}_1 s_1}^{(+\omega_1)}(x') \right\}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Utilizando o *truque de Casimir* [veja [2], Seção (7.7)] a soma sobre as configurações de spin pode ser transformada em um traço com dependência das matrizes gamma e espinores de Dirac  $\psi$ . Sabendo ainda que  $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$ ,  $(\gamma^0)^2 = 1$  e que a relação

$$\sum_{s = \pm} \psi_{\pm \mathbf{k} s}^{(\pm\omega)}(x) \bar{\psi}_{\pm \mathbf{k} s}^{(\pm\omega)}(x') = \frac{(\not{k} \pm m)}{2(2\pi)^3 \omega} e^{\pm i k^\mu (x - x')_\mu} \quad (2.17)$$

é obedecida, a expressão (2.16) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} G_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2}^{\mu\nu}(x, x') &= Tr \left\{ \gamma^\mu (C_V - C_A \gamma^5) \sum_{s_2 = \pm} \left[ \psi_{-\mathbf{k}_2 - s_2}^{(-\omega_2)}(x) \bar{\psi}_{-\mathbf{k}_2 - s_2}^{(-\omega_2)}(x') \right] \right. \\ &\quad \left. \times \gamma^\nu (C_V - C_A \gamma^5) \sum_{s_1 = \pm} \left[ \psi_{\mathbf{k}_1 s_1}^{(+\omega_1)}(x') \bar{\psi}_{\mathbf{k}_1 s_1}^{(+\omega_1)}(x) \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.18)$$

ou

$$\begin{aligned} G_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2}^{\mu\nu}(x, x') &= \frac{e^{i(k_1 + k_2)^\mu (x - x')_\mu}}{(2\pi)^6 \omega_1 \omega_2} \left\{ (C_V^2 + C_A^2) \left[ 2k_1^{(\mu} k_2^{\nu)} - \eta^{\mu\nu} k_1^\lambda k_{2\lambda} \right] + \right. \\ &\quad \left. + 2i C_V C_A \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} k_{1\alpha} k_{2\beta} - m_1 m_2 (C_V^2 - C_A^2) \eta^{\mu\nu} \right\}, \end{aligned} \quad (2.19)$$

com  $k_1^{(\mu} k_2^{\nu)} = (k_1^\mu k_2^\nu + k_1^\nu k_2^\mu)/2$ . Na passagem de (2.18) para (2.19) utilizou-se que [ver [2], Problema (9.2)]

$$\begin{aligned} Tr \left[ \gamma^\mu \left( C_V - C_A \gamma^5 \right) (k_1 + m_1) \gamma^\nu \left( C_V - C_A \gamma^5 \right) (k_2 + m_2) \right] = & -8i C_V C_A \epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} k_{1\lambda} k_{2\sigma} + \\ & + 4 \left( C_V^2 + C_A^2 \right) \left[ k_1^\mu k_2^\nu + k_1^\nu k_2^\mu - k_1 \cdot k_2 \eta^{\mu\nu} \right] + 4 \left( C_V^2 - C_A^2 \right) \left[ m_1 m_2 \eta^{\mu\nu} \right], \end{aligned} \quad (2.20)$$

tomando os devidos cuidados com os sinais de  $m$ , e notando na equação (2.19) a presença do pseudo-tensor de Levi-Civita totalmente anti-simétrico com  $\epsilon^{0123} = -1$ . Finalmente, simplificando com  $d\tau = dt/u^0 = dt/\gamma$  e levando em consideração o fenômeno de dilatação temporal, a equação (2.14) pode ser simplificada como

$$\begin{aligned} \frac{d^6 \mathcal{P}^{P_i \rightarrow P_f}}{d^3 \mathbf{k}_1 d^3 \mathbf{k}_2} = & \frac{G_{ef}^2}{(2\pi)^6 \omega_1 \omega_2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau' e^{i \left\{ \Delta M (\tau - \tau') + (k_1 + k_2)^\lambda [x(\tau) - x(\tau')] \right\}_\lambda} \\ & \times \left\{ 2 \left[ \left( C_V^2 + C_A^2 \right) k_1^{(\mu} k_2^{\nu)} + i C_V C_A \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} k_{1\alpha} k_{2\beta} \right] u_\mu(\tau) u_\nu(\tau') - \right. \\ & \left. - \left[ \left( C_V^2 - C_A^2 \right) m_1 m_2 + \left( C_V^2 + C_A^2 \right) k_1^\alpha k_{2\alpha} \right] u^\mu(\tau) u_\mu(\tau') \right\}. \end{aligned} \quad (2.21^*)$$

A equação (2.21) é válida independente da linha de mundo e quadri-velocidade da partícula  $P_i$ , desde que as condições de validade do formalismo para correntes semi-clássicas sejam respeitadas.

## 2.3 Núcleon Uniformemente Acelerado

Considera-se uma partícula com aceleração  $a$  constante, se movendo através de uma trajetória hiperbólica no plano  $(t, z)$  (Figura 4) usual com linha de mundo e quadri-velocidade dadas, respectivamente, por

$$x^\mu(\tau) = \left( a^{-1} \sinh(a\tau), 0, 0, a^{-1} \cosh(a\tau) \right), \quad (2.22)$$

e

$$u^\mu(\tau) = \left( \cosh(a\tau), 0, 0, \sinh(a\tau) \right). \quad (2.23)$$

Utilizando a mudança de coordenadas

$$\xi := \frac{\tau - \tau'}{2} \quad \text{e} \quad s := \frac{\tau + \tau'}{2}, \quad (2.24)$$

com  $|\det J(s, \xi)| = 2$  em (2.21) e as seguintes relações - que podem ser facilmente provadas com o auxílio de (2.22), (2.23) e das propriedades (A.3) à (A.9) -

$$[x(\tau) - x(\tau')]^\mu = 2a^{-1} \sinh(a\xi) u^\mu(s), \quad (2.25)$$

$$u^\mu(\tau) = \cosh(a\xi) u^\mu(s) + a \sinh(a\xi) x^\mu(s), \quad (2.26)$$

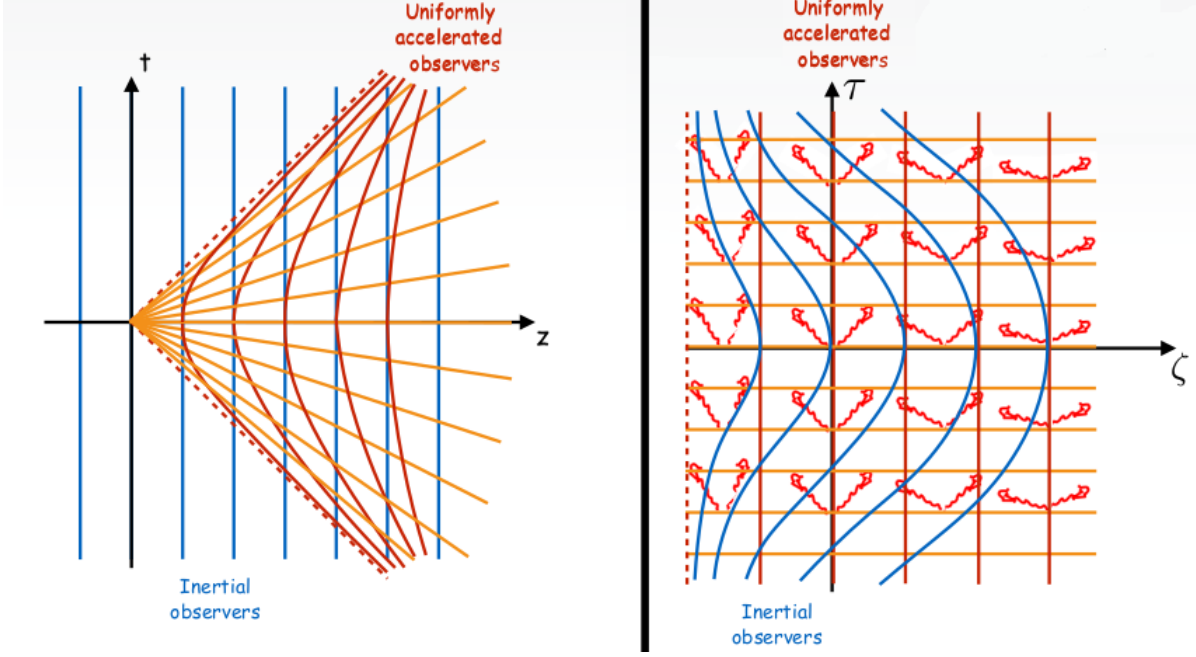


Figura 4 – Representação das linhas de mundo de observadores uniformemente acelerados no quadrante de Rindler. Na figura à esquerda as linhas azuis indicam os observadores inerciais, enquanto que as vermelhas os acelerados uniformemente. Na figura à direita, no referencial de observadores acelerados, as linhas vermelhas são todos referenciais co-acelerados. Fonte: [3].

$$u^\mu(\tau') = \cosh(a\xi)u^\mu(s) - a \sinh(a\xi)x^\mu(s), \quad (2.27)$$

e

$$u^\mu(\tau)u_\mu(\tau') = \cosh(2a\xi), \quad (2.28)$$

a probabilidade diferencial de transição, nesse caso, é escrita como

$$\begin{aligned} \frac{d^6 \mathcal{P}^{P_i \rightarrow P_f}}{d^3 \mathbf{k}_1 d^3 \mathbf{k}_2} &= \frac{2G_{ef}^2}{(2\pi)^6 \omega_1 \omega_2} \int_{-\infty}^{+\infty} ds \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi e^{2i\{\Delta M\xi + (k_1 + k_2)^\lambda u_\lambda(s) \sinh(a\xi) a^{-1}\}} \\ &\times \left\{ 2 \left( C_V^2 + C_A^2 \right) k_1^\mu k_2^\nu \left[ u_\mu(s) u_\nu(s) \cosh^2(a\xi) - a^2 x_\mu(s) x_\nu(s) \sinh^2(a\xi) \right] - \right. \\ &\quad - \cosh(2a\xi) \left[ \left( C_V^2 - C_A^2 \right) m_1 m_2 + \left( C_V^2 + C_A^2 \right) (k_1^\alpha k_{2\alpha}) \right] + \\ &\quad \left. + 2ia C_V C_A \sinh(2a\xi) \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} x^\mu(s) u^\nu(s) k_1^\alpha k_2^\beta \right\}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

As partículas emitidas no processo de decaimento terão um *boost*, haja visto que  $P_i$  possui uma velocidade não nula dependente de  $s$ . Se um boost na direção  $z$  for realizado para o referencial instantaneamente em repouso com  $P_i$ , as integrais poderão ser desacopladas e os férmions emitidos terão um novo quadri-momento dado por

$$\begin{aligned} k^\mu &\rightarrow \tilde{k}^\mu = (\tilde{\omega}, \tilde{\mathbf{k}}) := (k^\lambda u_\lambda(s), k^x, k^y, -ak^\lambda x_\lambda(s)) \\ &= (\omega \cosh(as) - k^z \sinh(as), k^x, k^y, -\omega \sinh(as) + k^z \cosh(as)). \end{aligned} \quad (2.30)$$



Esse passo, provindo de argumentos físicos, é ressaltado como de suma importância para a análise de um referencial inercial e para o desacoplamento das integrais em  $s$  e  $\xi$  na equação (2.29). Um comentário interessante de se realizar é que o decaimento dessas partículas aceleradas não é válido levando em conta somente *um* referencial inercial, como demonstra o boost acima (sendo válido para um momento e energia genéricos): uma classe de observadores inerciais é necessária (traços verdes na Fig. 5). As partículas só podem emitir radiação (ou decair), em seu cone de luz futuro; por conseguinte, considerando um dado instante  $t$  em um futuro distante, essa radiação poderá ser detectada por alguma linha de mundo de um observador inercial que venha a ter uma interseção com seu cone de luz futuro. Dessa forma, apesar de um ou outro observador inercial não detectar essa radiação, o único que detectar em um dado futuro poderá comunicar o resultado para os demais do grupo de observadores inerciais.

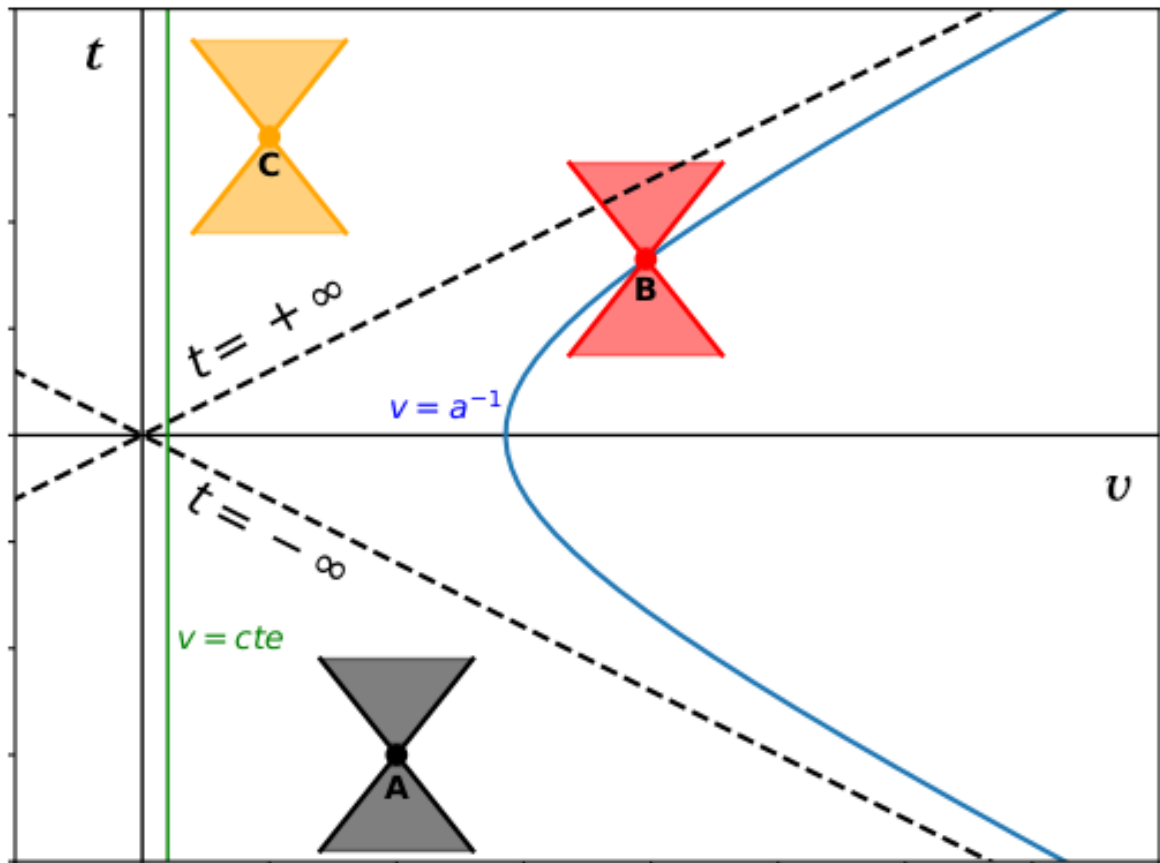


Figura 5 – Diagrama esquemático de  $t$  por  $v$  do decaimento de férmions visto no quadrante direito de Rindler. A partícula  $C$  é inacessível causalmente pelos referenciais acelerados uniformemente (em azul); a linha  $t = +\infty$  se comporta como um horizonte de eventos para esses observadores. A radiação emitida no cone de luz futuro da partícula  $B$  pode ser detectada por um observador inercial (em verde). Fonte: Elaborada pelo Autor.

Sendo a taxa de decaimento  $d\Gamma$  igual a probabilidade de decaimento por unidade de tempo, i.e.,  $d\Gamma^{P_i \rightarrow P_f} = d\mathcal{P}^{P_i \rightarrow P_f}/ds$ , com o auxílio da equação (2.29) esse objeto pode

ser reescrito por unidade de momentos dos férmions emitidos como

$$\begin{aligned} \frac{d^6 \Gamma^{P_i \rightarrow P_f}}{d^3 \tilde{\mathbf{k}}_1 d^3 \tilde{\mathbf{k}}_2} &= \frac{2G_{ef}^2}{(2\pi)^6 \tilde{\omega}_1 \tilde{\omega}_2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi e^{2i\{\Delta M \xi + a^{-1} \sinh(a\xi)(\tilde{\omega}_1 + \tilde{\omega}_2)\}} \\ &\times \left\{ (C_V^2 + C_A^2) [\tilde{\omega}_1 \tilde{\omega}_2 + \tilde{k}_1^z \tilde{k}_2^z] - 2iC_V C_A \sinh(2a\xi) (\tilde{\mathbf{k}}_1 \times \tilde{\mathbf{k}}_2)^z + \right. \\ &\left. + \cosh(2a\xi) \left[ (C_V^2 + C_A^2) (\tilde{\mathbf{k}}_1^\perp \cdot \tilde{\mathbf{k}}_2^\perp) - (C_V^2 - C_A^2) m_1 m_2 \right] \right\}, \end{aligned} \quad (2.31)$$

com  $(\tilde{\mathbf{k}}_1^\perp \cdot \tilde{\mathbf{k}}_2^\perp) = (\tilde{k}_1^x \tilde{k}_2^y - \tilde{k}_1^y \tilde{k}_2^x)$  e  $(\tilde{\mathbf{k}}_1 \times \tilde{\mathbf{k}}_2)^z = -ax^\mu u^\nu \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \tilde{k}_1^\alpha \tilde{k}_2^\beta = -ax^\mu u^\nu (\tilde{\mathbf{k}}_1 \times \tilde{\mathbf{k}}_2)_{\mu\nu}$ .

Introduzindo uma nova variável  $\chi = e^{a\xi}$  e utilizando a expressão (A.11) junto com a representação de  $\tilde{k}$  em coordenadas esféricas

$$\tilde{k}^x = \tilde{k} \sin \tilde{\theta} \cos \tilde{\phi}, \quad \tilde{k}^y = \tilde{k} \sin \tilde{\theta} \sin \tilde{\phi}, \quad \tilde{k}^z = \tilde{k} \cos \tilde{\theta}, \quad (2.32)$$

tal que  $\tilde{k} \in \mathbb{R}^+$ ,  $\tilde{\theta} \in [0, \pi]$  e  $\tilde{\phi} \in [0, 2\pi)$ ,

$$\begin{aligned} \frac{d^6 \Gamma^{P_i \rightarrow P_f}}{d^3 \tilde{\mathbf{k}}_1 d^3 \tilde{\mathbf{k}}_2} &= \frac{4G_{ef}^2 e^{-\frac{\pi\Delta M}{a}}}{(2\pi)^6 \tilde{\omega}_1 \tilde{\omega}_2} \left\{ (C_V^2 + C_A^2) [\tilde{\omega}_1 \tilde{\omega}_2 + \tilde{k}_1 \tilde{k}_2 \cos \tilde{\theta}_1 \cos \tilde{\theta}_2] K_{2i\Delta M/a} [2(\tilde{\omega}_1 + \tilde{\omega}_2)/a] \right. \\ &\times \text{Im} \left\{ K_{2+2i\Delta M/a} [2(\tilde{\omega}_1 + \tilde{\omega}_2)/a] \right\} 2C_V C_A \tilde{k}_1 \tilde{k}_2 \sin \tilde{\theta}_1 \sin \tilde{\theta}_2 \sin(\tilde{\phi}_1 - \tilde{\phi}_2) + \\ &\left. + \left[ (C_V^2 - C_A^2) m_1 m_2 + (C_V^2 + C_A^2) \tilde{k}_1 \tilde{k}_2 \sin \tilde{\theta}_1 \sin \tilde{\theta}_2 \cos(\tilde{\phi}_1 - \tilde{\phi}_2) \right] \right. \\ &\left. \times \text{Re} \left\{ K_{2+2i\Delta M/a} [2(\tilde{\omega}_1 + \tilde{\omega}_2)/a] \right\} \right\}, \end{aligned} \quad (2.33)$$

onde  $K_\nu(z)$  são as funções de Bessel modificadas de segundo tipo [25]. Os termos imaginários e reais de  $K_\nu(z)$  aparecem utilizando a propriedade  $K_\nu(z) = K_{-\nu}(z)$  [25]. Utilizando coordenadas esféricas novamente e notando que os termos com  $\sin(\tilde{\phi}_1 - \tilde{\phi}_2)$  e  $\cos(\tilde{\phi}_1 - \tilde{\phi}_2)$  não contribuem, a equação (2.33) integrada sobre um dos momentos resulta em

$$\begin{aligned} \frac{d^3 \Gamma^{P_i \rightarrow P_f}}{d^3 \tilde{\mathbf{k}}_j} &= \frac{8G_{ef}^2 e^{-\frac{\pi\Delta M}{a}}}{(2\pi)^5 \tilde{\omega}_j a} \int_0^{+\infty} d\tilde{k}_l \tilde{k}_l^2 \tilde{\omega}_l \left\{ (C_V^2 + C_A^2) \tilde{\omega}_j \tilde{\omega}_l K_{2i\Delta M/a} [2(\tilde{\omega}_j + \tilde{\omega}_l)/a] + \right. \\ &\left. + (C_V^2 - C_A^2) m_j m_l \text{Re} \left\{ K_{2+2i\Delta M/a} [2(\tilde{\omega}_j + \tilde{\omega}_l)/a] \right\} \right\}, \end{aligned} \quad (2.34)$$

com as taxas de decaimento se apresentando como esfericamente simétricas - com  $j = 1$  e  $l = 2$  e vice-versa. Em termos da energia das partículas emitidas,

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma^{P_i \rightarrow P_f}}{d\tilde{\omega}_j} &= \frac{G_{ef}^2 e^{-\frac{\pi\Delta M}{a}}}{\pi^4 a} \sqrt{\tilde{\omega}_j^2 - m_j^2} \int_{m_l}^{+\infty} d\tilde{\omega}_l \sqrt{\tilde{\omega}_l^2 - m_l^2} \left\{ (C_V^2 + C_A^2) \tilde{\omega}_j \tilde{\omega}_l \right. \\ &\left. \times K_{2i\Delta M/a} [2(\tilde{\omega}_j + \tilde{\omega}_l)/a] + (C_V^2 - C_A^2) m_j m_l \text{Re} \left\{ K_{2+2i\Delta M/a} [2(\tilde{\omega}_j + \tilde{\omega}_l)/a] \right\} \right\}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Finalmente, a taxa de decaimento total e energia total emitida por cada um dos férmions são dadas, respectivamente, por

$$\begin{aligned} \Gamma^{P_i \rightarrow P_f} = & \frac{G_{ef}^2 e^{-\frac{\pi \Delta M}{a}}}{\pi^4 a} \int_{m_1}^{+\infty} d\tilde{w}_1 \int_{m_2}^{+\infty} d\tilde{w}_2 \sqrt{\tilde{w}_1^2 - m_1^2} \sqrt{\tilde{w}_2^2 - m_2^2} \left\{ (C_V^2 + C_A^2) \tilde{w}_1 \tilde{w}_2 \right. \\ & \times K_{2i\Delta M/a} [2(\tilde{w}_1 + \tilde{w}_2)/a] + (C_V^2 - C_A^2) m_1 m_2 \\ & \left. \times \operatorname{Re} \left\{ K_{2+2i\Delta M/a} [2(\tilde{w}_1 + \tilde{w}_2)/a] \right\} \right\}, \end{aligned} \quad (2.36^*)$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_j^{P_i \rightarrow P_f} = & \frac{G_{ef}^2 e^{-\frac{\pi \Delta M}{a}}}{\pi^4 a} \int_{m_1}^{+\infty} d\tilde{w}_1 \int_{m_2}^{+\infty} d\tilde{w}_2 \tilde{w}_j \sqrt{\tilde{w}_1^2 - m_1^2} \sqrt{\tilde{w}_2^2 - m_2^2} \left\{ (C_V^2 + C_A^2) \right. \\ & \times \tilde{w}_1 \tilde{w}_2 K_{2i\Delta M/a} [2(\tilde{w}_1 + \tilde{w}_2)/a] + (C_V^2 - C_A^2) m_1 m_2 \\ & \left. \times \operatorname{Re} \left\{ K_{2+2i\Delta M/a} (2(\tilde{w}_1 + \tilde{w}_2)/a) \right\} \right\}, \end{aligned} \quad (2.37^*)$$

com  $j = 1$  e  $j = 2$ . Para a resolução dessas integrais, existem dois casos específicos de interesse: um em que ambos os férmions são considerados não massivos e outro em que apenas um é não massivo. Por organização, esses casos serão explorados separadamente.

### 2.3.1 Caso I: Emissão de um férmion massivo e outro não massivo

No caso em que  $f_1$  ou  $\bar{f}_2$  é uma partícula não massiva - por exemplo, nos processos (1.9) com  $m_\nu = m_{\bar{\nu}} \approx 0$  - deve-se utilizar a mudança de coordenadas  $(\tilde{w}_1, \tilde{w}_2) \rightarrow (\rho, \zeta)$  com  $|\det J(\rho, \zeta)| = m^2/2$  ¶ tal que

$$\rho := \frac{\tilde{w}_{sem\ massa}}{\tilde{w}_{massiva}} + 1 \quad \text{e} \quad \zeta := \tilde{w}_{massiva}/m^2, \quad (2.38)$$

de forma que a equação (2.36) com  $\chi(\rho, \zeta) = 2m\rho\zeta^{1/2}/a$  pode ser reescrita como

$$\Gamma^{P_i \rightarrow P_f} = \frac{G_{ef}^2 (C_V^2 + C_A^2) m^6}{2\pi^4 a e^{\pi \Delta M/a}} \int_1^{+\infty} d\rho (\rho - 1)^2 \int_1^{+\infty} d\zeta \zeta^{3/2} (\zeta - 1)^{1/2} K_{2i\Delta M/a} [\chi]. \quad (2.39)$$

Sendo  $\tilde{w}_{massiva} = \zeta^{1/2} m$  e  $\tilde{w}_{sem\ massa} = (\rho - 1) \zeta^{1/2} m$ , em (2.37) para os dois casos, respectivamente,

$$\mathcal{W}_{massiva}^{P_i \rightarrow P_f} = \frac{G_{ef}^2 (C_V^2 + C_A^2) m^7}{2\pi^4 a e^{\pi \Delta M/a}} \int_1^{+\infty} d\rho (\rho - 1)^2 \int_1^{+\infty} d\zeta \zeta^2 (\zeta - 1)^{1/2} K_{2i\Delta M/a} [\chi], \quad (2.40)$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{sem\ massa}^{P_i \rightarrow P_f} = & \frac{G_{ef}^2 (C_V^2 + C_A^2) m^7}{2\pi^4 a e^{\pi \Delta M/a}} \int_1^{+\infty} d\rho (\rho - 1)^3 \\ & \times \int_1^{+\infty} d\zeta \zeta^2 (\zeta - 1)^{1/2} K_{2i\Delta M/a} [\chi]. \end{aligned} \quad (2.41)$$

¶ Nos processos 1.9 o outro férmion ainda é massivo, de forma que enquanto  $m_1 \approx 0$ , por exemplo,  $m_2 \neq 0$ , ou vice-versa.

Utilizando as expressões (A.12) e (A.2) em (2.39), (2.40) e (2.41),

$$\Gamma^{P_i \rightarrow P_f} = \frac{G_{ef}^2 (C_V^2 + C_A^2) m^3 a^2}{8\pi^{7/2} e^{\pi\Delta M/a}} \int_1^{+\infty} d\rho (\rho^{-1} - 2\rho^{-2} + \rho^3) \times G_{1,3}^{3,0} \left( \frac{m^2 \rho^2}{a^2} \middle| \begin{matrix} 0 \\ -\frac{3}{2}, \frac{3}{2} + \frac{i\Delta M}{a}, \frac{3}{2} - \frac{i\Delta M}{a} \end{matrix} \right), \quad (2.42)$$

$$\mathcal{W}_{massiva}^{P_i \rightarrow P_f} = \frac{G_{ef}^2 (C_V^2 + C_A^2) m^3 a^3}{8\pi^{7/2} e^{\pi\Delta M/a}} \int_1^{+\infty} d\rho (\rho^{-2} - 2\rho^{-3} + \rho^{-4}) \times G_{1,3}^{3,0} \left( \frac{m^2 \rho^2}{a^2} \middle| \begin{matrix} 0 \\ -\frac{3}{2}, 2 + \frac{i\Delta M}{a}, 2 - \frac{i\Delta M}{a} \end{matrix} \right), \quad (2.43)$$

e

$$\mathcal{W}_{sem\ massa}^{P_i \rightarrow P_f} = \frac{G_{ef}^2 (C_V^2 + C_A^2) m^3 a^3}{8\pi^{7/2} e^{\pi\Delta M/a}} \int_1^{+\infty} d\rho (\rho^{-1} - 3\rho^{-2} + 3\rho^{-3} - \rho^{-4}) \times G_{1,3}^{3,0} \left( \frac{m^2 \rho^2}{a^2} \middle| \begin{matrix} 0 \\ -\frac{3}{2}, 2 + \frac{i\Delta M}{a}, 2 - \frac{i\Delta M}{a} \end{matrix} \right), \quad (2.44)$$

onde  $G_{p,q}^{m,n}(z | \begin{smallmatrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{smallmatrix})$  é a função G de Meijer [25]. Finalmente, com uma nova substituição  $v := \rho^2$  em (2.42), (2.43) e (2.44) junto com a expressão (A.13), <sup>||</sup>

$$\Gamma^{P_i \rightarrow P_f} = \frac{G_{ef}^2 (C_V^2 + C_A^2) m^3 a^2}{32\pi^{7/2} e^{\pi\Delta M/a}} G_{2,4}^{4,0} \left( \frac{m^2}{a^2} \middle| \begin{matrix} \frac{3}{2}, 2 \\ \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2} + \frac{i\Delta M}{a}, \frac{3}{2} - \frac{i\Delta M}{a} \end{matrix} \right), \quad (2.45^*)$$

$$\mathcal{W}_{massiva}^{P_i \rightarrow P_f} = \frac{G_{ef}^2 (C_V^2 + C_A^2) m^3 a^3}{32\pi^{7/2} e^{\pi\Delta M/a}} G_{3,5}^{5,0} \left( \frac{m^2}{a^2} \middle| \begin{matrix} 0, 2, \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2}, 1, -\frac{3}{2}, 2 + \frac{i\Delta M}{a}, 2 - \frac{i\Delta M}{a} \end{matrix} \right), \quad (2.46^*)$$

e

$$\mathcal{W}_{sem\ massa}^{P_i \rightarrow P_f} = \frac{G_{ef}^2 (C_V^2 + C_A^2) m^3 a^3}{64\pi^{7/2} e^{\pi\Delta M/a}} G_{2,4}^{4,0} \left( \frac{m^2}{a^2} \middle| \begin{matrix} 2, \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 2 + \frac{i\Delta M}{a}, 2 - \frac{i\Delta M}{a} \end{matrix} \right). \quad (2.47^*)$$

### 2.3.2 Caso II: Emissão de férmions não massivos

Ainda considerando a massa de neutrinos como aproximadamente nula, o caso em que ambos  $f_1$  e  $\bar{f}_2$  são não massivos é de interesse, por exemplo, em processos como  $e^- \rightarrow e^- \nu_e \bar{\nu}_e$ . Dessa forma, integrando a equação (2.31) em ambas variáveis de momento, em coordenadas esféricas,

$$\Gamma^{P_i \rightarrow P_f} = \frac{G_{ef}^2 (C_V^2 + C_A^2)}{2\pi^4} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi e^{2i\Delta M\xi} \left\{ \int_0^{+\infty} \tilde{\omega} \tilde{\omega}^2 \exp \left[ \frac{2i\tilde{\omega}}{a} (\sinh(a\xi) + i\epsilon) \right] \right\}^2, \quad (2.48)$$

com  $\epsilon > 0$  um regulador para a convergência da integral [para um processo de regularização semelhante veja [12], exemplo (4.1)] que ao fim será eliminado com  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+}$  (2.48).

<sup>||</sup>Após essa transformação, o resultado será constituído de uma soma de funções G de Meijer. Essas podem ser resumidas através de combinações das expressões 9.31 em [25].

Para a energia total emitida, lembrando que existe um fator 2 ao se somar a taxa responsável por cada um dos férmions,

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^{P_i \rightarrow P_f} = & \frac{G_{ef}^2 (C_V^2 + C_A^2)}{\pi^4} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi e^{2i\Delta M \xi} \int_0^{+\infty} \tilde{\omega}_j \tilde{\omega}_j^2 \exp \left[ \frac{2i\tilde{\omega}}{a} (\sinh(a\xi) + i\epsilon) \right] \\ & \times \int_0^{+\infty} \tilde{\omega}_l \tilde{\omega}_l^2 \exp \left[ \frac{2i\tilde{\omega}}{a} (\sinh(a\xi) + i\epsilon) \right], \end{aligned} \quad (2.49)$$

com  $j = 1$  e  $l = 2$  ou vice-versa - a numeração dos férmions aqui não é importante já que a contribuição de cada um para a energia é indistinguível. Integrando (2.48) e (2.49) sobre a energia de cada férmion emitido,

$$\Gamma^{P_i \rightarrow P_f} = \frac{-2G_{ef}^2 (C_V^2 + C_A^2) a^5}{\pi^4} \int_0^{+\infty} d\omega \frac{\omega^{5+2i\Delta M/a}}{(w^2 - 1 + 2i\epsilon')^6}, \quad (2.50)$$

e

$$\mathcal{W}^{P_i \rightarrow P_f} = \frac{-12iG_{ef}^2 (C_V^2 + C_A^2) a^6}{\pi^4} \int_0^{+\infty} d\omega \frac{\omega^{6+2i\Delta M/a}}{(w^2 - 1 + 2i\epsilon')^7}, \quad (2.51)$$

com outro regularizador  $\epsilon'$  introduzido, tendo em vista que os limites das integrais passam pelo polo  $w^+ = 1$  das funções. Utilizando o teorema de Resíduos\*\* e tomando cuidado com a orientação dos contornos a serem escolhidos (Figura 6),

$$\Gamma^{P_i \rightarrow P_f} = \frac{G_{ef}^2 (C_V^2 + C_A^2)}{60\pi^3} \left( \frac{4a^4 \Delta M + 5a^2 \Delta M^3 + \Delta M^5}{e^{2\pi\Delta M/a} - 1} \right), \quad (2.52^*)$$

e

$$\mathcal{W}^{P_i \rightarrow P_f} = \frac{G_{ef}^2 (C_V^2 + C_A^2)}{3840\pi^3} \left( \frac{225a^6 + 1036a^4 \Delta M^2 + 560a^2 \Delta M^4 + 64\Delta M^6}{e^{2\pi\Delta M/a} + 1} \right), \quad (2.53^*)$$

lembrando que  $\Delta M = M_f - M_i$ .

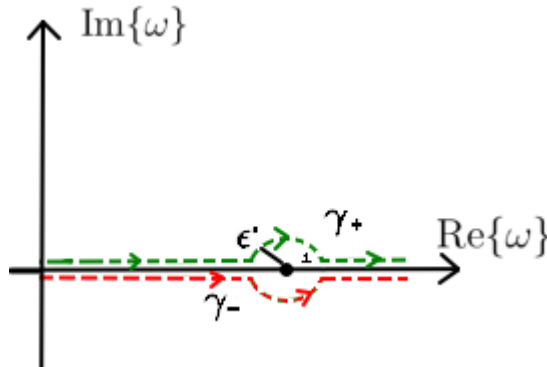


Figura 6 – Contorno do polo  $w^+ = 1$  das equações (2.50) e (2.51). Os caminhos são dados por  $\gamma_{\pm} := [0, 1 - \epsilon'] \cup \{1 \pm \epsilon' e^{i\theta}; \theta \in [0, \pi]\} \cup [1 + \epsilon', +\infty)$  com  $\epsilon' \rightarrow 0_+$ . Fonte: Elaborada pelo Autor.

\*\*A solução completa dessas integrais pode ser encontrada no apêndice de [6].

## 2.4 Decaimento de Prótons e Nêutrons Uniformemente Acelerados: Perspectiva Inercial

O interesse dessa seção reside em descrever processos como os decaimentos (1.9) através das expressões (2.45), (2.46) e (2.47) como descritos por um observador inercial. A passagem da expressão (2.29) para (2.31) através de (2.30) é enfatizada para a análise sobre essa perspectiva.

### 2.4.1 Decaimento $\beta^+$ e $\beta^-$

A expressão (2.42) possui uma forma interessante, apesar de parecer complicada, pois é dada em termos de constantes de fácil acesso, como as massas dos bárions envolvidos e do férmion emitido - junto com os fatores de forma -, porém, resta ainda determinar a constante de acoplamento efetiva  $G_{ef} = G_{pn}$ . Tendo de serem válidas as relações obtidas para  $a \rightarrow 0$ , o valor da constante é fixado através do tempo de meia vida *inercial* do nêutron [29]:

$$\Gamma_{inercial}^{n \rightarrow p} := \Gamma^{n \rightarrow p}(a \rightarrow 0) = 1/887 \text{ s}. \quad (2.54)$$

Ao invés desse limite ser analisado sobre as funções de Meijer, que possuem um caráter complicado por si, com um passo para trás o limite deve ser realizado em (2.31) com  $C_V = C_A = 1$ :

$$\begin{aligned} \frac{d^6 \Gamma^{n \rightarrow p}}{d^3 \tilde{\mathbf{k}}_e d^3 \tilde{\mathbf{k}}_\nu} &= \frac{4G_{pn}^2}{(2\pi)^6 \tilde{\omega}_e \tilde{\omega}_\nu} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{2i\xi(\Delta M + \tilde{\omega}_e + \tilde{\omega}_\nu)} (\tilde{\omega}_e \tilde{\omega}_\nu + \tilde{\mathbf{k}}_e \cdot \tilde{\mathbf{k}}_\nu) = \\ &= \frac{2G_{pn}^2}{(2\pi)^5} \left( 1 + \frac{\tilde{\mathbf{k}}_e \cdot \tilde{\mathbf{k}}_\nu}{\tilde{\omega}_e \tilde{\omega}_\nu} \right) \delta(\tilde{\omega}_e - \tilde{\omega}_\nu - \Delta M). \end{aligned} \quad (2.55)$$

Integrando (2.55) em coordenadas esféricas e notando que o termo com  $\tilde{\mathbf{k}}_e \cdot \tilde{\mathbf{k}}_\nu$  resulta em zero quando integrado sobre as coordenadas angulares,

$$\Gamma_{inercial}^{n \rightarrow p} = \frac{G_{pn}^2}{\pi^3} \int_{m_\nu=0}^{\Delta M - m_e} d\tilde{\omega}_\nu \tilde{\omega}_\nu^2 (\Delta M - \tilde{\omega}_\nu) \sqrt{(\Delta M - \tilde{\omega}_\nu)^2 - m_e^2}, \quad (2.56)$$

onde os limites de integração são encontrados através do princípio de conservação de energia. Efetuando essa integral numericamente através dos valores na Tabela 1,  $G_{pn} = 1,74 G_F^{\dagger\dagger}$ , lembrando que o resultado deve ser multiplicado por  $\hbar^{1/2}$  tendo em vista o sistema de unidades naturais.

Notando através das expressões (2.45), (2.46) e (2.47) que a diferença nos tempos de meia vida das transições  $p \rightarrow n$  e  $n \rightarrow p$  é dada por

$$\tau_n(a) = e^{2\pi|\Delta M|/a} \tau_p(a), \quad (2.57)$$

<sup>††</sup>Sendo  $[G_{pn}] = \text{Energia}^{-2}$  a teoria é não renormalizável, assim como na teoria original de Fermi para interações fracas. Não obstante, isso não representa um problema para o escopo desenvolvido na seção anterior tendo em vista que todos os cálculos foram feitos em nível de árvore [ver seções (5.5) e (5.6) de [1] para uma discussão sobre casos fora do nível de árvore, em que há divergência, e sobre uma forma de contornar esse problema através de métodos de renormalização.]

$\tau_n$ (s)	$\Delta M$ (MeV/c <sup>2</sup> )	$m_e$ (MeV/c <sup>2</sup> )	$G_F$ (GeV <sup>-2</sup> )
887	1.29	0.51	$1.17 \times 10^{-5}$

Tabela 1 – Constantes físicas utilizadas [29].

e da mesma forma que as energias emitidas na forma de cada lépton são relacionadas por

$$\mathcal{W}_j^{n \rightarrow p} = e^{2\pi|\Delta M|/a} \mathcal{W}_j^{p \rightarrow n}, \quad (2.58)$$

lembrando que  $\Delta M = M_n - M_p$ , é possível observar a influência da aceleração própria do núcleon sobre essas grandezas nas Figuras 7 e 8. As acelerações consideradas obedecem a condição de não-recuo estabelecida na Seção (2.1), ou seja,  $a \ll m_p, m_n$  com  $m_p = 938 \text{ MeV}/c^2$ ,  $m_n = 940 \text{ MeV}/c^2$ . Em ambas expressões (2.57) e (2.58), para uma aceleração

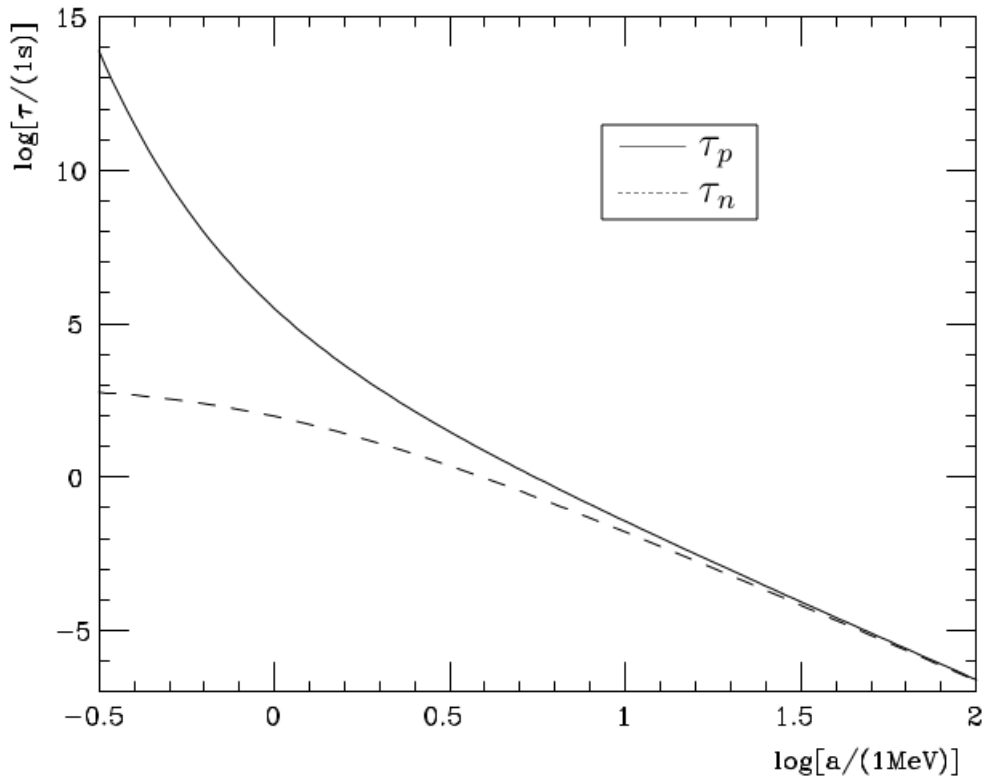


Figura 7 – Tempos de meia vida (2.57) para as transições (1.9) em função da aceleração própria dos bárions iniciais. Os tempos de meia vida reproduzem os resultados inerciais em  $\log(\tau_n) = \log(887) \approx 2.94$  e  $\log(\tau_p)$  cresce indefinidamente com  $a \rightarrow 0$ . Fonte: Adaptada de [4].

$a \gg a_c := 2\pi|\Delta M| \approx 8 \text{ MeV}$ ,  $\tau_p \approx \tau_n$  e da mesma forma  $\mathcal{W}_j^{n \rightarrow p} \approx \mathcal{W}_j^{p \rightarrow n}$ . Para uma estimativa de  $\tau_p$  em condições como as do LHC, utilizando  $a_{LHC} \approx 10^{-8} \text{ MeV}^{\ddagger\ddagger}$  e

<sup>‡‡</sup>Lembrando que essa é uma aceleração própria: mesmo que um feixe do LHC tenha energia na escala TeV, a aceleração própria é proporcional à aceleração fornecida pelos aceleradores por um fator de  $\gamma^{-3}$

$\tau_n(a \ll |\Delta M|) \approx 10^3$  s em (2.57),  $\tau_p(a_{LHC}) \approx 10^{3 \times 10^8}$  anos. Apesar de ser uma estimativa grosseira, o resultado de que prótons inerciais são *estáveis* para acelerações alcançáveis em aceleradores de partículas nas presentes capacidades tecnológicas ainda é obtido.

Um cenário mais adequado para o decaimento de prótons consistiria em considerar a influência do campo magnético de pulsares em prótons provindos de raios cósmicos ultra energéticos. Nessas condições, os prótons com uma energia  $E_p \approx 1.6 \times 10^{14}$  eV em campos magnéticos da ordem de  $|B_{pulsar}| \approx 10^{14}$  Gauss com uma velocidade próxima de  $c$  teriam uma aceleração de  $a_p \approx 8 \text{ MeV} \gg a_{LHC}$  [31]. Utilizando a expressão (2.45) tem-se que  $\tau_p \approx 10^{-7}$  s como tempo próprio de meia vida do próton acelerado. Definindo a distribuição

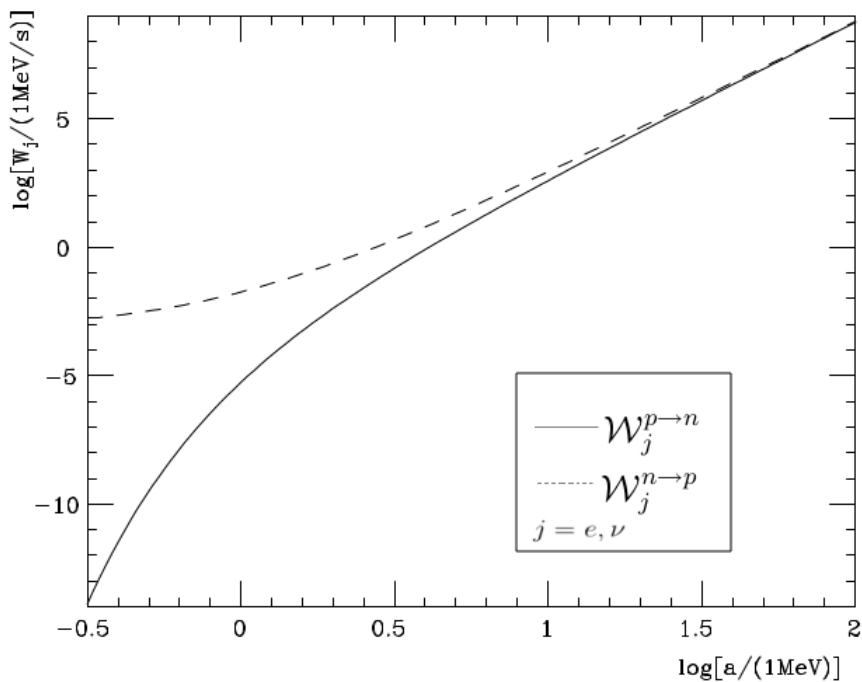


Figura 8 – Contribuição da energia emitida na forma de cada lépton para as transições (1.9). As equações (2.46) e (2.47) reproduzem os mesmos comportamentos em ambos os decaimentos. Fonte: Adaptada de [4].

normalizada em energia dos léptons emitidos como

$$\mathcal{N}_j^{p_i \rightarrow p_f} = \frac{1}{\Gamma^{P_i \rightarrow P_f}} \frac{d\Gamma^{P_i \rightarrow P_f}}{d\tilde{\omega}_j}, \quad (2.59)$$

com o auxílio das expressões (2.35) e (2.45), é possível observar na Figura 9 que a energia típica dos léptons emitidos sob a perspectiva inercial é dada por  $\tilde{\omega} \approx a$ , justificando a forma da condição de não-recuo definida na Seção (2.1) em termos da aceleração própria do núcleo.

---

(para acelerações na direção da velocidade da partícula). Se a energia de um feixe de prótons for de 5 TeV, por exemplo,  $\gamma \approx 7600$ , de forma que  $a_{própria} \approx 1,2 \times 10^{-7}$  MeV [30].



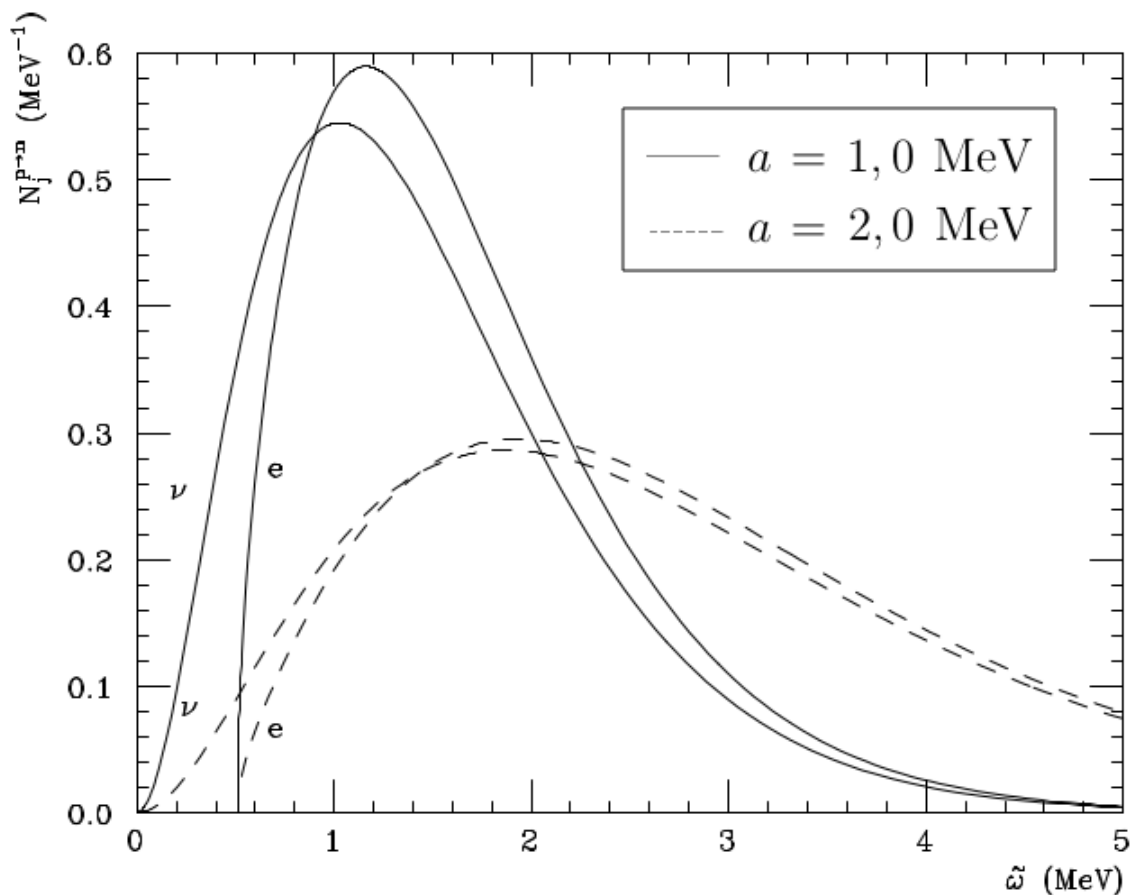


Figura 9 – Distribuições (normalizadas) em energia de léptons emitidos em (1.9) para duas acelerações próprias do núcleo, obtidas através da expressão (2.59). Fonte: Adaptada de [4].

#### 2.4.1.1 Resultados em 1+1 dimensões

Os resultados obtidos inercialmente para o decaimento de prótons e nêutrons uniformemente acelerados foram obtidos através de uma série de aproximações e limites no contexto de física de partículas: massa do neutrino aproximadamente nula, acoplamento direto da interação fraca dos léptons com a corrente semi-clássica, e estrutura interna das partículas bariônicas desprezada. Apesar de parecer restritivo, os resultados anteriores serão estendidos brevemente para 1+1 dimensões, assim como realizado em [7], notando que um tratamento mais completo em 3+1 dimensões e  $m_\nu \neq 0$  só viria a ser realizado em [10], concordando com os resultados que serão demonstrados nas próximas seções.

Para o limite em 1+1 dimensões, então, considera-se  $\cos \tilde{\theta}_j = \text{sign}(\tilde{k}_j^z)$ ,  $\tilde{k}_1^x = \tilde{k}_1^y = \tilde{k}_2^x = \tilde{k}_2^y = 0$ , i.e., o momento dos léptons emitidos (dado por 2.30) se dá em uma dimensão espacial somente, e a expressão (2.33) é multiplicada por  $[(2\pi)^2]^2$  - o fator multiplicativo (que é elevado ao quadrado devido a equação (2.14)) se deve à normalização em (2.17) para as duas outras dimensões espaciais negligenciadas no momento. Integrando nas variáveis

de momento restantes dos léptons emitidos e utilizando  $C_V = 1$  e  $C_A = 0$ ,

$$\begin{aligned}\Gamma_{2d}^{n \rightarrow p} &= \frac{4G_{2d}^2 e^{-\pi\Delta M/a}}{\pi^2 a} \int_0^{+\infty} dk_e \int_0^{+\infty} d\tilde{k}_\nu K_{2i\Delta M/a} (2(\tilde{\omega}_e - \tilde{\omega}_\nu)/a) = \\ &= \frac{4G_{2d}^2 e^{-\pi\Delta M/a}}{\pi^2 a} \int_{m_e}^{+\infty} \frac{d\tilde{\omega}_e \tilde{\omega}_e}{\sqrt{\tilde{\omega}_e^2 - m_e^2}} \int_{m_\nu=0}^{+\infty} d\tilde{\omega}_\nu K_{2i\Delta M/a} (2(\tilde{\omega}_e - \tilde{\omega}_\nu)/a),\end{aligned}\quad (2.60)$$

onde utilizou-se que  $k_e \cdot k_\nu = \tilde{\omega}_e \tilde{\omega}_\nu - \tilde{k}_e^z \tilde{k}_\nu^z$ . Através de procedimentos similares aos utilizados para a equação (2.45) ser alcançada a partir de (2.36)<sup>§§</sup>,

$$\Gamma^{P_i \rightarrow P_f} = \frac{G_{2d}^2 m_e}{2\pi^{3/2} e^{\pi\Delta M/a}} G_{1,3}^{3,0} \left( \frac{m^2}{a^2} \middle| \begin{matrix} 1 \\ -1/2, 1/2 + \frac{i\Delta M}{a}, 1/2 - \frac{i\Delta M}{a} \end{matrix} \right). \quad (2.61)$$

Assim como anteriormente, os decaimentos beta estão relacionados pela expressão (2.57), reproduzindo numericamente os resultados inerciais e acelerados esperados. Para fixar a constante de acoplamento  $G_{2d}$  como no caso em 3+1 dimensões [7], o limite para uma aceleração nula é tomado em (2.31), de forma que

$$\begin{aligned}\Gamma_{2d}^{n \rightarrow p}{}_{inercial} &= \frac{2G_{2d}^2}{\pi} \int_0^\infty d\tilde{k}_e^z \int_0^\infty d\tilde{k}_\nu^z \delta(\tilde{\omega}_e + \tilde{\omega}_\nu - \Delta M) = \\ &= \frac{2G_{2d}^2}{\pi} \int_{m_e}^{\Delta M} d\tilde{\omega}_e \frac{\tilde{\omega}_e}{\sqrt{\tilde{\omega}_e^2 - m_e^2}} = \frac{2G_{2d}^2}{\pi} \sqrt{\Delta M^2 - m_e^2} = \frac{1}{887s}.\end{aligned}\quad (2.62)$$

Com os valores na Tabela 1, o valor encontrado é de  $G_{2d} \approx 9.918 \times 10^{-13}$ , onde novamente o resultado numérico foi multiplicado por  $\hbar^{1/2}$  tendo em vista que  $[G_{2d}] = (\text{s} \cdot \text{eV})^{-1/2}$ .

## 2.4.2 Comentário sobre Fatores de Forma e Simetrias em Interações Fortes

No intuito de ressaltar a importância das aproximações utilizadas para os fatores de forma e enriquecer a discussão física de uma perspectiva de partículas simplesmente, alguns comentários adicionais podem ser realizados.

As condições  $C_V = 1$  e  $C_A = 1$  correspondem, respectivamente, à conservação da corrente vetorial e corrente axial, ou hipótese CVC, como visto na Seção (1.3); em palavras mais simples, levando em consideração as implicações às simetrias de interações fortes, para se utilizar a hipótese de correntes conservadas a massa de quarks envolvidos no decaimento deve ser nula, mas essa suposição está de acordo com as condições de validade para o formalismo de correntes semi-clássicas [Seção 2.1, item 1].

Modelos mais completos envolvendo, por exemplo, a estrutura interna dessas partículas não seriam de interesse, tendo em vista que com a morte do conceito de uma corrente semi-clássica, as linhas de mundo não poderiam ser determinadas; além disso, de

<sup>§§</sup>Diferente do caso anterior em que uma soma de funções de G de Meijer aparece na passagem para a taxa de decaimento, utilizando a propriedade (A.14), tem-se que  $G_{2,4}^{4,0} \left( \frac{m^2}{a^2} \middle| \begin{matrix} 0, 1 \\ 0, -1/2, 1/2 + \frac{i\Delta M}{a}, 1/2 - \frac{i\Delta M}{a} \end{matrix} \right) = G_{1,3}^{3,0} \left( \frac{m^2}{a^2} \middle| \begin{matrix} 1 \\ -1/2, 1/2 + \frac{i\Delta M}{a}, 1/2 - \frac{i\Delta M}{a} \end{matrix} \right)$ .

um ponto de vista apenas de partículas, como o próprio cálculo do Vanzella, Matsas [8] e do Rainer [5] demonstraram, a influência da aceleração para processos de decaimento nas capacidades tecnológicas presentes em aceleradores é efêmera, de forma que não existiriam correções a serem feitas.

Não obstante, caso um tratamento mais completo fosse realizado nessa perspectiva, todo um cuidado deveria ser tomado levando em consideração que a proximidade das massas de prótons e nêutrons (assim como dos 3 tipos de píons) é uma consequência da simetria de isospin da teoria, sendo ambos pertencentes a um dubleto de isospin: na aproximação CVC os multipletos de isospin se tornam degenerados de forma que  $m_n = m_p$ . ¶¶

## 2.5 Decaimento de Prótons e Nêutrons Uniformemente Acelerados: Perspectiva de Rindler

Em referenciais co-acelerados com o núcleon, coordenadas apropriadas para a descrição de um observador uniformemente acelerado devem ser utilizadas. Esse caso é caracterizado pelo quadrante de Rindler  $z > |t|$  (coordenadas  $\tau$  e  $v$ ) tal que o elemento de linha e as coordenadas sejam descritas como

$$ds^2 = (av)^2 d\tau^2 - dv^2 \quad (2.63)$$

e

$$t = v \sinh(a\tau) \quad \text{e} \quad z = v \cosh(a\tau), \quad (2.64)$$

com  $a = \sqrt{-a^\mu a_\mu} = \text{constante}$  sendo a aceleração própria do núcleon e as coordenadas definidas em  $0 < v < +\infty$  e  $-\infty < \tau < +\infty$ . O núcleon e o observador co-acelerado seguem, então, uma linha de mundo dada por  $v(\tau) = a^{-1}$ , estando dessa forma estáticos um para o outro (Figura 4, lado direito). No quadrante de Rindler visto por esses observadores, o processo  $p^+ \rightarrow e^+ n^0 \nu_e$  é proibido por motivos energéticos. Porém, pelo princípio da covariância geral\*\*\*, os resultados obtidos na seção anterior deveriam ser obtidos novamente, i.e., que o próton pode sofrer a transição para o nêutron. Essa consistência só pode ser alcançada se a existência do *Efeito Unruh* for considerada: nesse referencial os observadores estarão imersos em um banho térmico de partículas, de forma que o processo

¶¶Ver “*Complement: Isospin and Flavor SU(3)*” em [1], capítulo 8.

\*\*\* Assim como do ponto de vista de um observador inercial os prótons acelerados decaíram, a transição  $p \rightarrow n$  deveria ser observada por um referencial co-acelerado com o próton para a consistência da descrição do fenômeno físico em ambos os referenciais. Porém, nesse referencial, estático em relação às partículas, o tempo de meia vida dos prótons deve reproduzir o resultado visto *inercialmente* para prótons *não acelerados*: prótons não decaem através do decaimento beta inverso por motivos de conservação de energia [32]. Sem o Efeito Unruh a descrição do fenômeno por ambos referenciais representaria um aparente paradoxo: o próton sofre a transição em um referencial, mas em outro não; paradoxo este não consistente com o princípio da covariância geral [17] e com nossa concepção de uma realidade física.

pode ser realizado através dos canais

$$(v) p^+ e^- \xrightarrow{a} n^0 \nu_e, \quad (vi) p^+ \bar{\nu}_e \xrightarrow{a} n^0 e^+ \quad \text{ou} \quad (vii) p^+ e^- \bar{\nu}_e \xrightarrow{a} n^0, \quad (2.65)$$

com os léptons no banho térmico sendo chamados de *Partículas de Rindler*, justamente por serem observados pelos observadores em aceleração uniforme no quadrante de Rindler [12]. Os léptons de Rindler são descritos por †††

$$\hat{\Psi}(\tau, v) = \sum_{s=\pm} \int_0^{+\infty} d\omega \left[ \hat{b}_{\omega s} \psi_{\omega s}(\tau, v) + \hat{d}_{\omega s}^\dagger \psi_{-\omega -s}(\tau, v) \right]. \quad (2.66)$$

As soluções  $\psi_{\omega s}$  da equação de Dirac modificada  $(i\gamma_R^\mu \tilde{\nabla}_\mu - m) \Psi = 0$  [33] no quadrante de Rindler com respeito ao campo de Killing de boosts  $\partial_\tau$ , com spin *up* e *down* são dadas, respectivamente, por

$$\psi_{\omega+}(\tau, v) = \left( \frac{m \cosh(\pi\omega/a)}{2\pi^2 a} \right)^{1/2} \begin{bmatrix} K_{i\omega/a+1/2}(mv) + iK_{i\omega/a-1/2}(mv) \\ 0 \\ -K_{i\omega/a+1/2}(mv) + iK_{i\omega/a-1/2}(mv) \\ 0 \end{bmatrix} e^{-i\omega\tau} \quad (2.67)$$

e

$$\psi_{\omega-}(\tau, v) = \left( \frac{m \cosh(\pi\omega/a)}{2\pi^2 a} \right)^{1/2} \begin{bmatrix} 0 \\ K_{i\omega/a+1/2}(mv) + iK_{i\omega/a-1/2}(mv) \\ 0 \\ K_{i\omega/a+1/2}(mv) - iK_{i\omega/a-1/2}(mv) \end{bmatrix} e^{-i\omega\tau}, \quad (2.68)$$

refletindo as particularidades do processo de quantização em cada região do espaço-tempo: a parte espacial da solução não representa mais uma onda plana como em (2.7) e (2.8), mas depende de forma não trivial das funções de Bessel modificadas de segundo tipo [25]. Os operadores  $\hat{b}_{\omega s}$  e  $\hat{d}_{\omega s}$  obedecem relações de anticomutação similares às (2.10) e (2.11), e as soluções  $\psi_{\omega s}$  são normalizadas pelo produto interno

$$\langle \psi_{\omega s}, \psi_{\omega' s'} \rangle := \int_{\Sigma} d\Sigma_\mu \bar{\psi}_{\omega s} \gamma_R^\mu \psi_{\omega' s'} = \delta(\omega - \omega') \delta_{ss'}, \quad (2.69)$$

onde  $\Sigma$  é uma hiper-superfície com  $\tau = \text{constante}$  [12] e  $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ . Os campos leptônicos representando as partículas de Rindler nos processos (2.65) são acoplados diretamente à corrente

$$\hat{j}^\mu = \hat{q}(\tau) \frac{u^\mu}{u^0 \sqrt{-g}} \delta(v - a^{-1}) \quad (2.70)$$

através da ação de interação

$$\hat{S}_I = \int d^2x \sqrt{-g} \hat{j}_\mu \left( \hat{\Psi}_\nu \gamma_R^\mu \hat{\Psi}_e + \hat{\Psi}_e \gamma_R^\mu \hat{\Psi}_\nu \right). \quad (2.71)$$

††† Os limites de integração, com  $\omega \in [0, +\infty)$  são uma consequência direta da quantização dos campos no quadrante de Rindler [12]. Na Seção 3.1 outras implicações serão exploradas.

Para o processo (p1) em (2.65), utilizando a forma explícita das matrizes gamma no quadrante de Rindler [33], a amplitude de transição é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{(v)}^{p \rightarrow n} &= \left( \langle n | \otimes \langle \nu_{\omega_\nu, s_\nu} | \right) \hat{S}_I \left( | e_{\omega_e s_e}^- \rangle \otimes | p \rangle \right) = \\ &= G_{2d} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau e^{i\Delta M \tau} \langle \nu_{\omega_\nu, s_\nu} | \hat{\Psi}_\nu(\tau, a^{-1}) \hat{\Psi}_e(\tau, a^{-1}) | e_{\omega_e s_e}^- \rangle = \\ &= G_{2d} \delta_{s_e, s_\nu} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau e^{i\Delta M \tau} \psi_{\omega_\nu, s_\nu}^\dagger(\tau, a^{-1}) \psi_{\omega_e s_e}(\tau, a^{-1}). \end{aligned} \quad (2.72)$$

Através de (2.67) e (2.68) a amplitude de transição pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{(v)}^{p \rightarrow n} &= \frac{4G_{2d}}{\pi a} \sqrt{m_e m_\nu \cosh\left(\frac{\pi\omega_{e^-}}{a}\right) \cosh\left(\frac{\pi\omega_\nu}{a}\right)} \\ &\times \text{Re} \left[ K_{i\omega_\nu/a-1/2}\left(\frac{m_\nu}{a}\right) K_{i\omega_{e^-}/a+1/2}\left(\frac{m_e}{a}\right) \delta_{s_e, s_\nu} \delta(\omega_{e^-} - \omega_\nu - \Delta M) \right], \end{aligned} \quad (2.73)$$

lembrando que  $K_\nu = K_{-\nu}$  e que o produto dos espinores em  $\psi_{\omega_s}^\dagger \psi_{\omega_s} = cte$  [2]. De uma forma totalmente similar, as amplitudes de transição para os processos (vi) e (vii) são dadas por

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{(vii)}^{p \rightarrow n} &= \frac{4G_{2d}}{\pi a} \sqrt{m_e m_\nu \cosh\left(\frac{\pi\omega_{e^+}}{a}\right) \cosh\left(\frac{\pi\omega_{\bar{\nu}}}{a}\right)} \\ &\times \text{Re} \left[ K_{i\omega_{e^+}/a-1/2}\left(\frac{m_e}{a}\right) K_{i\omega_{\bar{\nu}}/a+1/2}\left(\frac{m_\nu}{a}\right) \delta_{s_e, s_{\bar{\nu}}} \delta(\omega_{\bar{\nu}} - \omega_{e^+} - \Delta M) \right], \end{aligned} \quad (2.74)$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{(viii)}^{p \rightarrow n} &= \frac{4G_{2d}}{\pi a} \sqrt{m_e m_\nu \cosh\left(\frac{\pi\omega_{e^-}}{a}\right) \cosh\left(\frac{\pi\omega_{\bar{\nu}}}{a}\right)} \\ &\times \text{Re} \left[ K_{i\omega_{e^-}/a+1/2}\left(\frac{m_e}{a}\right) K_{i\omega_{\bar{\nu}}/a+1/2}\left(\frac{m_\nu}{a}\right) \delta_{s_e, s_{\bar{\nu}}} \delta(\omega_{\bar{\nu}} + \omega_{e^-} - \Delta M) \right], \end{aligned} \quad (2.75)$$

notando que assim como em (v), apenas o primeiro termo da ação (2.71) contribui para o valor esperado em (2.72) para o processo (vii), e para (vi) somente o segundo termo.

As respectivas taxas de transição diferenciais por energia de partículas emitidas e absorvidas pelo núcleon *no banho térmico* nos processos (2.65) são representadas por

$$\frac{1}{\mathcal{T}} \frac{d^2 \mathcal{P}_{(v)}^{p \rightarrow n}}{d\omega_{e^-} d\omega_\nu} = \frac{1}{\mathcal{T}} \sum_{s_e = \pm} \sum_{s_\nu = \pm} \left| \mathcal{A}_{(v)}^{p \rightarrow n} \right|^2 n_F(\omega_{e^-}) [1 - n_F(\omega_\nu)], \quad (2.76)$$

$$\frac{1}{\mathcal{T}} \frac{d^2 \mathcal{P}_{(vi)}^{p \rightarrow n}}{d\omega_{e^+} d\omega_{\bar{\nu}}} = \frac{1}{\mathcal{T}} \sum_{s_e = \pm} \sum_{s_{\bar{\nu}} = \pm} \left| \mathcal{A}_{(vi)}^{p \rightarrow n} \right|^2 n_F(\omega_{\bar{\nu}}) [1 - n_F(\omega_{e^+})] \quad (2.77)$$

e

$$\frac{1}{\mathcal{T}} \frac{d^2 \mathcal{P}_{(vii)}^{p \rightarrow n}}{d\omega_{e^-} d\omega_{\bar{\nu}}} = \frac{1}{\mathcal{T}} \sum_{s_e = \pm} \sum_{s_{\bar{\nu}} = \pm} \left| \mathcal{A}_{(vii)}^{p \rightarrow n} \right|^2 n_F(\omega_{e^-}) n_F(\omega_{\bar{\nu}}), \quad (2.78)$$

onde  $\mathcal{T} = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau$  é definido formalmente como o tempo próprio *total* do núcleon [1][18][12], com  $(1 - n_F)$  e  $n_F$  representando as taxas de emissão induzida e absorção

espontânea dos léptons presentes no banho térmico pelo núcleon [24], e  $n_F(\omega) := 1/(1 + e^{2\pi\omega/a})$  o fator térmico fermiônico [34]. A introdução dessas taxas de emissão e absorção nas expressões acima é de importância *fundamental* para a consistência dos cálculos em ambos referenciais, tendo em vista que termos similares surgem do objeto amplitude de transição, assim como no caso do detector de Unruh-DeWitt (Seção 1.4), devido às funções hiperbólicas e termos similares provindos do processo de quantização.

Utilizando as expressões de amplitude nas taxas diferenciais de transição e integrando as expressões anteriores (2.76), (2.77) e (2.78) nas energias de cada lépton de Rindler, as taxas de transição são encontradas como

$$\Gamma_{(v)}^{p \rightarrow n} = \frac{4G_{2d}^2 m_e m_\nu}{\pi^3 a^2 e^{\pi\Delta M/a}} \int_{\Delta M}^{+\infty} d\omega_{e^-} \left[ \text{Re} \left( K_{i(\omega_{e^-} - \Delta M)/a - 1/2} (m_\nu/a) K_{i\omega_{e^-}/a + 1/2} (m_e/a) \right) \right]^2, \quad (2.79)$$

$$\Gamma_{(vi)}^{p \rightarrow n} = \frac{4G_{2d}^2 m_e m_\nu}{\pi^3 a^2 e^{\pi\Delta M/a}} \int_0^{+\infty} d\omega_{e^+} \left[ \text{Re} \left( K_{i(\omega_{e^+} + \Delta M)/a - 1/2} (m_\nu/a) K_{i\omega_{e^+}/a + 1/2} (m_e/a) \right) \right]^2, \quad (2.80)$$

e

$$\Gamma_{(vii)}^{p \rightarrow n} = \frac{4G_{2d}^2 m_e m_\nu}{\pi^3 a^2 e^{\pi\Delta M/a}} \int_0^{\Delta M} d\omega_{e^-} \left[ \text{Re} \left( K_{i(\omega_{e^-} - \Delta M)/a - 1/2} (m_\nu/a) K_{i\omega_{e^-}/a + 1/2} (m_e/a) \right) \right]^2, \quad (2.81)$$

notando que os limites de integração são determinados pela conservação de energia usual nos processos (2.65) e que as frequências no quadrante de Rindler *direito* [12] podem assumir qualquer valor positivo devido a suas próprias isometrias. A taxa de transição total dos prótons definida por

$$\Gamma_{tot}^{p \rightarrow n} = \Gamma_{(v)}^{p \rightarrow n} + \Gamma_{(vi)}^{p \rightarrow n} + \Gamma_{(vii)}^{p \rightarrow n} \quad (2.82)$$

pode ser reescrita de forma que o intervalo de integração englobe todos os casos anteriores - a parte negativa de frequências não contribui já que  $\omega \in [0, +\infty)$  - como

$$\Gamma_{tot} = \frac{4G_{2d}^2 m_e m_\nu}{\pi^3 a^2 e^{\pi\Delta M/a}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \left[ \text{Re} \left( K_{i(\omega - \Delta M)/a - 1/2} (m_\nu/a) K_{i\omega/a + 1/2} (m_e/a) \right) \right]^2. \quad (2.83)$$

Para o limite em que  $m_\nu \rightarrow 0$ , utilizando as expressões do Apêndice (A.18) e (A.20), pode-se demonstrar a seguinte relação assintótica para o produto das duas funções de Bessel:

$$\frac{m}{a} K_{i\omega/a + 1/2} (m/a) K_{i\omega/a - 1/2} (m/a) \xrightarrow{m/a \rightarrow 0} \frac{\pi}{2 \cosh(\pi\omega/a)}. \quad \text{†††} \quad (2.84)$$

Dessa forma, as taxas de transição (2.79-2.81) e (2.83) podem ser reescritas como:

$$\Gamma_{(v)}^{p \rightarrow n} = \frac{G_{2d}^2 m_e}{\pi^2 a e^{\pi\Delta M/a}} \int_{\Delta M}^{+\infty} d\omega_{e^-} \frac{K_{i\omega_{e^-}/a + 1/2} (m_e/a) K_{i\omega_{e^-}/a - 1/2} (m_e/a)}{\cosh[\pi(\omega_{e^-} - \Delta M)/a]}, \quad (2.85)$$

---

††† Utilizando as expressões indicadas do Apêndice A para demonstrar a expressão assintótica, deve-se tomar cuidado com os quatro termos que aparecerão no produto das funções de Bessel: apenas um termo  $\propto \left| \Gamma(1/2 + i\omega/a) \right|^{-2} = \cosh(\pi\omega/a)/\pi$  irá contribuir no limite; outros dois termos só podem ser identificados como nulos quando integrados em (2.83), utilizando o Lemma de *Riemann-Lebesgue* [26].

$$\Gamma_{(vi)}^{p \rightarrow n} = \frac{G_{2d}^2 m_e}{\pi^2 a e^{\pi \Delta M/a}} \int_0^{+\infty} d\omega_{e^+} \frac{K_{i\omega_{e^+}/a+1/2}(m_e/a) K_{i\omega_{e^+}/a-1/2}(m_e/a)}{\cosh[\pi(\omega_{e^+} + \Delta M)/a]}, \quad (2.86)$$

$$\Gamma_{(vii)}^{p \rightarrow n} = \frac{G_{2d}^2 m_e}{\pi^2 a e^{\pi \Delta M/a}} \int_0^{+\Delta M} d\omega_{e^-} \frac{K_{i\omega_{e^-}/a+1/2}(m_e/a) K_{i\omega_{e^-}/a-1/2}(m_e/a)}{\cosh[\pi(\omega_{e^-} - \Delta M)/a]}, \quad (2.87)$$

e

$$\Gamma_{tot}^{p \rightarrow n} = \frac{G_{2d}^2 m_e}{\pi^2 a e^{\pi \Delta M/a}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{K_{i\omega/a+1/2}(m_e/a) K_{i\omega/a-1/2}(m_e/a)}{\cosh[\pi(\omega - \Delta M)/a]}. \quad (2.88)$$

Na impossibilidade de uma solução analítica da expressão (2.88), para a comparação com o tempo de decaimento em (2.61), na referência [6] uma comparação numérica direta foi realizada. Definindo os tempos de meia vida no referencial inercial e no referencial co-acelerado com o próton (referencial de Rindler), respectivamente, como

$$\tau_{Inercial}^{p \rightarrow n}(a) = \frac{1}{\Gamma_{Inercial}^{p \rightarrow n}} = \frac{2\pi^{3/2} e^{\pi \Delta M/a}}{G_{2d}^2 m_e} \left[ G_{1,3}^{3,0} \left( \frac{m^2}{a^2} \middle|_{-1/2, 1/2 + \frac{i\Delta M}{a}, 1/2 - \frac{i\Delta M}{a}} \right) \right]^{-1} \quad (2.89)$$

e

$$\tau_{Rindler}^{p \rightarrow n}(a) = \frac{\pi^2 a e^{\pi \Delta M/a}}{G_{2d}^2 m_e} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{K_{i\omega/a+1/2}(m_e/a) K_{i\omega/a-1/2}(m_e/a)}{\cosh[\pi(\omega - \Delta M)/a]} \right]^{-1}, \quad (2.90)$$

a diferença numérica obtida entre ambos foi de  $\Delta \approx 10^{-16}$  com a precisão da máquina em que o cálculo foi feito [9].

De maneira extremamente similar e direta, no Referencial de Rindler os possíveis canais para o processo de transição  $n \rightarrow p$ <sup>§§§</sup> dados por

$$(viii) \ n^0 \nu_e \xrightarrow{a} p^+ e^-, \quad (ix) \ n^0 e^+ \xrightarrow{a} p^+ \bar{\nu}_e \quad \text{ou} \quad (x) \ n^0 \xrightarrow{a} p^+ e^- \bar{\nu}_e, \quad (2.91)$$

podem ter suas respectivas taxas de transição calculados como

$$\Gamma_{(viii)}^{n \rightarrow p} = \frac{G_{2d}^2 m_e}{\pi^2 a e^{-\pi \Delta M/a}} \int_{\Delta M}^{+\infty} d\omega_{e^-} \frac{K_{i\omega_{e^-}/a+1/2}(m_e/a) K_{i\omega_{e^-}/a-1/2}(m_e/a)}{\cosh[\pi(\omega_{e^-} - \Delta M)/a]}, \quad (2.92)$$

$$\Gamma_{(ix)}^{n \rightarrow p} = \frac{G_{2d}^2 m_e}{\pi^2 a e^{-\pi \Delta M/a}} \int_0^{+\infty} d\omega_{e^+} \frac{K_{i\omega_{e^+}/a+1/2}(m_e/a) K_{i\omega_{e^+}/a-1/2}(m_e/a)}{\cosh[\pi(\omega_{e^+} + \Delta M)/a]}, \quad (2.93)$$

$$\Gamma_{(x)}^{n \rightarrow p} = \frac{G_{2d}^2 m_e}{\pi^2 a e^{-\pi \Delta M/a}} \int_0^{+\Delta M} d\omega_{e^-} \frac{K_{i\omega_{e^-}/a+1/2}(m_e/a) K_{i\omega_{e^-}/a-1/2}(m_e/a)}{\cosh[\pi(\omega_{e^-} - \Delta M)/a]}, \quad (2.94)$$

e

$$\Gamma_{tot}^{n \rightarrow p} = \frac{G_{2d}^2 m_e}{\pi^2 a e^{-\pi \Delta M/a}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{K_{i\omega/a+1/2}(m_e/a) K_{i\omega/a-1/2}(m_e/a)}{\cosh[\pi(\omega - \Delta M)/a]}. \quad (2.95)$$

Um aspecto interessante de se explorar para as possíveis transições no quadrante de Rindler reside em observar a influência dos processos de transição pelos canais (2.65) e (2.91) para diferentes acelerações, podendo traçar assim canais de preferência para

<sup>§§§</sup>Nesse caso não existe restrição energética para a transição ocorrer através do canal (1.9).

determinadas energias. O objeto necessário para descrever essa influência é dado pelas *taxas* relativas (ou *branching ratios*)[2], definidas por

$$BR_{(v)} := \Gamma_{(v)}^{p \rightarrow n} / \Gamma_{tot}^{p \rightarrow n} \quad BR_{(vi)} := \Gamma_{(vi)}^{p \rightarrow n} / \Gamma_{tot}^{p \rightarrow n} \quad BR_{(vii)} := \Gamma_{(vii)}^{p \rightarrow n} / \Gamma_{tot}^{p \rightarrow n} \quad (2.96)$$

para os processos (2.65), por exemplo. Pela Figura 10 pode-se observar que para baixas acelerações, os processos (vii) e (x) dominam para as transições  $p \rightarrow n$  e  $n \rightarrow p$ , respectivamente: existem ‘poucas partículas’ no banho térmico com energia o suficiente para as transições já ocorrerem.

Assim como no caso do referencial inercial, para acelerações maiores que 1 Mev as transições  $n \rightarrow p$  e  $p \rightarrow n$  (em todos os canais)<sup>¶¶¶</sup> se tornam indistinguíveis do ponto de vista do observador acelerado. Outro ponto interessante é que enquanto o comportamento idêntico das transições se apresenta par a par em Rindler [i.e., em (v), (viii), (vii), (x) e (vi), (ix)], no caso inercial essa idiosincrasia só ocorria para  $a > 1$  Mev (Figura 7). Isso ocorre pois no quadrante de Rindler não há qualquer restrição de energia para as transições citadas (veja que não está sendo considerado o decaimento  $\beta^+$ ), dessa forma, os fatores de cada partícula entram de forma simétrica no balanço de energia em transições do tipo  $n \rightarrow p$  e  $p \rightarrow n$ .

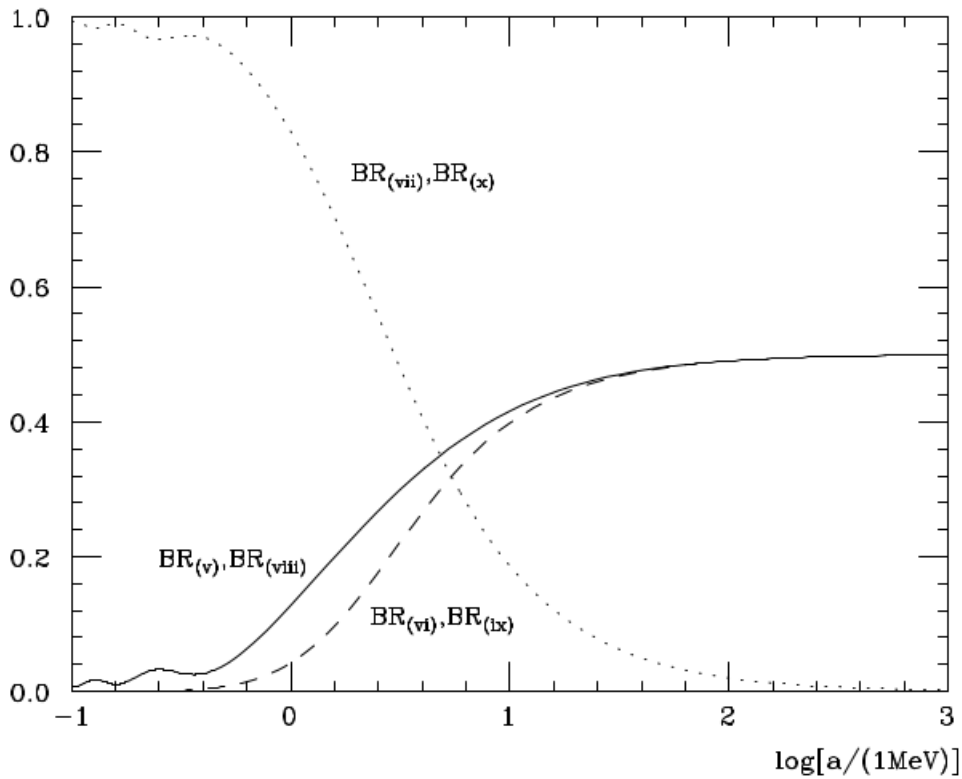


Figura 10 – Evoluções das taxas relativas nos processos (2.91) e (2.65) pela aceleração própria do núcleo no referencial de Rindler para os processos, todas obtidos atrvés das expressões (2.96). Fonte: [4].

<sup>¶¶¶</sup> Sendo dominadas pelos processos (v), (vii) e (vi), (ix), com (vii), (x) cada vez mais irrelevantes.



## 3 Outras Aplicações

Este capítulo final pretende de forma complementar, pelo formalismo de correntes semi-clássicas desenvolvido na Seção 2.1, mostrar que o regime perturbativo é capaz de obter se não respostas, indicativos da possível influência da gravitação sobre dois fenômenos específicos no nível quântico: a possível detecção de partículas *massivas* na vizinhança de corpos massivos com energia total  $E < mc^2$  e as reações de neutronização em estrelas de nêutrons, importante mecanismo para o resfriamento desses objetos [35].

### 3.1 Detecção de partículas com $w < m$

Uma das diferenças essenciais em teoria quântica de campos usual para a em espaços curvos reside na realização do caráter não essencial do grupo de simetrias de Poincaré no desenvolvimento da teoria [36].

O vínculo imposto no processo de quantização inercial [18] para uma partícula de massa de repouso  $m$ , momento  $p$  e energia  $E$  pode ser expresso por  $\omega(\mathbf{k}, m)/c := \sqrt{\mathbf{k}^2 + (mc/\hbar)^2} \geq m$ , onde  $\omega = E/\hbar$  e  $\mathbf{k} = \mathbf{p}/\hbar$  representam a frequência angular e número de onda respectivos da onda plana descrevendo a partícula. Essa *relação de dispersão* [13] é uma consequência direta da relação entre os geradores de translação temporal  $\partial_t$  e espaciais  $\partial_x, \partial_y$  e  $\partial_z$  com  $(t, x, y, z)$  um sistema de coordenadas ortogonal e globalmente inercial [12]. Porém, relações como essa não são regra em teoria quântica de campos em espaços curvos, e especificamente na quantização uniformemente acelerada, essa não é observada: um exemplo já encontrado no capítulo anterior consiste em observar que os canais descritos em (2.93) e (2.94) assumem energias extremamente pequenas.

De fato, esse vínculo não existe exatamente nas proximidades da Terra devido a efeitos de curvatura produzidos pelo seu campo gravitacional, de forma que uma pergunta natural poderia surgir: qual seria, então, a possibilidade de se detectar uma partícula *livre* nas vizinhanças da Terra que violasse esse vínculo, i.e., que possuísse energia total  $\omega < m$ , com  $m$  sua massa de repouso?

A abordagem adotada em [37] consiste em aproximar o campo gravitacional gerado pela Terra em sua vizinhança pelo espaço-tempo de Schwarzschild [12][17] descrito pelo elemento de linha em duas dimensões

$$ds^2 = (1 - 2M/r) dt^2 - (1 - 2M/r)^{-1} dr^2, \quad (3.1)$$

onde tal vínculo de dispersão não existe. Dessa forma, a pergunta anterior se daria para observadores próximos de um buraco negro *estático*\* (i.e., sem carga e momento angular),

\*A Terra de fato não está parada, e poderia se pensar que o elemento de linha de Kerr [17] seria mais

2D e de massa  $M$ . Nas proximidades do horizonte de eventos,  $r_h = r \approx 2M$ , esse elemento pode ser associado perturbativamente <sup>†</sup> com o elemento de linha de Rindler (2.63), com  $0 < \rho < +\infty$  e  $-\infty < t < +\infty$  tal que

$$ds^2 = \left(\frac{\rho}{4M}\right)^2 dt^2 - d\rho^2, \quad (3.2)$$

e

$$\rho(r) := \sqrt{8M(r - 2M)} \quad \text{e} \quad \rho(r_h) = 0. \quad (3.3)$$

Considerando um campo escalar, real e livre  $\hat{\Phi}(\rho)$  quantizado (em relação a um observador com linha de mundo  $\rho = 4M$  com  $t$  sendo seu tempo próprio) no quadrante de Rindler tal que

$$\hat{\Phi}(\rho) = \int_0^\infty d\omega \left\{ \hat{a}_\omega u_\omega(\rho) + \hat{a}_\omega^\dagger u_\omega^*(\rho) \right\} \quad (3.4)$$

expandido em termos de seus modos normais  $u_\omega(\rho)$  que obedecem a equação de Klein-Gordon [1]

$$\left(\square + m^2\right) u_\omega(\rho) = 0 \quad (3.5)$$

e a equação que garante a positividade de energias

$$\partial_t u_\omega = -i\omega u_\omega, \quad (3.6)$$

sendo dados por [38]

$$u_\omega(\rho) = \sqrt{(4M/\pi^2) \sinh(4\pi M\omega)} K_{4iM\omega}(m\rho) e^{-i\omega t} \quad (3.7)$$

e normalizados de acordo com o produto interno de Klein-Gordon <sup>‡</sup>

$$\langle u_\omega, u_{\omega'} \rangle := 4Mi \int_0^\infty \frac{d\rho}{\rho} (u_\omega^* \partial_t u_{\omega'} - u_{\omega'} \partial_t u_\omega^*) = \delta(\omega - \omega') \quad (3.8)$$

levando à relação de comutação para os operadores de criação e aniquilação

$$[\hat{a}_\omega, \hat{a}_{\omega'}^\dagger] = \delta(\omega - \omega'). \quad (3.9)$$

Assim como na Seção (1.4), a corrente semi-clássica de um detector de Unruh-DeWitt [12] estático é definida em  $\rho = \rho_d$  como

$$\hat{j}(\rho) = \frac{\hat{q}(s)}{u^0(s) \sqrt{-g}} \delta(\rho - \rho_d), \quad (3.10)$$

adequado para o problema. Porém, em escalas astrofísicas, a velocidade de rotação da Terra em torno de seu eixo produz efeitos inteiramente desprezíveis nessa perspectiva, de forma que o tratamento através da métrica de Schwarzschild em 2D se torna razoável.

<sup>†</sup>A passagem de Schwarzschild para Rindler em duas dimensões deve ser compreendida aqui como no princípio da equivalência, relacionando localmente os efeitos do campo gravitacional produzido pela Terra aos referenciais uniformemente acelerados [[17], capítulo 2].

<sup>‡</sup>Em TQC usual o produto interno de KG é definido por  $\langle \Phi_1 | \Phi_2 \rangle := i \int d\mathbf{x} \left( \Phi_1^* \overleftrightarrow{\partial}_0 \Phi_2 \right)$  [1]. Nesse caso a única diferença se apresenta na relação  $(4M/\rho) dr = d\rho$  dada por (3.3).

com  $\hat{q}(s) = \exp(i\hat{H}s)\hat{q}_0 \exp(-i\hat{H}s)$  o termo de monopolo localizado na representação de Heisenberg [1] e  $\hat{H}$  a hamiltoniana própria com dois níveis de energia acessíveis

$$\hat{H}|E_0\rangle = E_0|E_0\rangle \quad \text{e} \quad \hat{H}|E\rangle = E|E\rangle. \quad (3.11)$$

A ação de interação é construída pelo acoplamento direto entre essa corrente e o campo escalar quantizado

$$\hat{S}_I = \int d^2x \sqrt{-g} \hat{j}(\rho) \hat{\Phi}(\rho) = \int_{-\infty}^{+\infty} ds \hat{q}(s) \hat{\Phi}[\rho(s)], \quad (3.12)$$

com  $ds = dt/u^0 = dt/\gamma$  de forma que a integral seja feita sobre o tempo próprio  $s$  do detector, notando que o termo espacial é resolvido pelo delta de Dirac em (3.10). Para o observador em  $\rho_0 = 4M$  poderia se perguntar qual a probabilidade de se detectar uma partícula representada pelo pacote de onda com energia  $\omega$  dado por

$$|\phi_\omega\rangle = \int_0^\infty d\omega' f_\omega(\omega') a_{\omega'}^\dagger |0\rangle, \quad (3.13)$$

com  $f(\omega')$  sendo uma distribuição (ou função teste) centrada em  $\omega$ , i.e., com valores em um espaço de operadores lineares [18]<sup>§</sup> tal que

$$\int_0^{+\infty} d\omega' |f_\omega(\omega')|^2 = 1. \quad (3.14)$$

com  $\langle \phi_\omega | \phi_\omega \rangle = 1$  e  $|f_\omega(\omega')|^2$  representando uma densidade de estados (normalizada). A probabilidade do detector observar<sup>¶</sup> esse pacote em um ponto  $\rho_p$  é dada em nível de árvore por

$$P_\omega(\rho_d) = \left| \langle 0 | \otimes \langle E | \hat{S}_I (|E_0\rangle \otimes |\phi_\omega\rangle) \right|^2. \quad (3.15)$$

Em teoria de perturbação independente do tempo [39][13], a absorção da energia da partícula pelo detector é responsável por uma transição de estado com diferença de energia  $\Delta E = E - E_0 = \omega$ , em unidades naturais. No intuito de maximizar a probabilidade de detecção [37] em cada ponto  $\rho_d$  um fator de redshift cosmológico [17] é necessário em  $\Delta E = u^0 \omega = (4M/\rho_d) \omega = (\rho_0/\rho_d) \omega$ . Tendo essa relação em mente, e observando que as integrais em  $\omega$  podem ser estendidas de  $-\infty$  à  $+\infty$  pelo mesmo argumento na passagem de (2.81) para (2.82) (apenas frequências e energias positivas são definidas no quadrante de Rindler direito), a probabilidade pode ser reescrita como

$$P_\omega(\rho_d) = \left( c_o^2/M \right) |f_\omega(\omega)|^2 \sinh(4\pi M\omega) \rho_d^2 K_{4iM\omega}^2(m\rho_d), \quad (3.16)$$

com  $c_o := |\langle E | \hat{q}_0 | E_0 \rangle|$  sendo uma constante de acoplamento efetiva.

<sup>§</sup>A idealização desse pacote de onda com momentum  $k$  e energia  $\omega$  bem definidas deve ser pensado com a sua dispersão  $\Delta K \ll K$  em termos do momentum, ou  $\Delta\omega \ll \omega$  em termos da energia [18].

<sup>¶</sup>O verbo observar aqui se refere ao detector sofrendo uma transição para o estado  $|E\rangle$  após detectar a partícula, assim como desenvolvido na Seção (1.4).

De maneira natural, pode-se definir a densidade de probabilidade normalizada

$$\frac{dP_\omega}{d\rho_d} = \frac{P_\omega(\rho_d)}{\int_0^{+\infty} P_\omega(\rho'_d) d\rho'_d}, \quad (3.17)$$

com  $dP_\omega$  sendo a probabilidade de se encontrar a partícula esteja entre  $\rho_d$  e  $\rho_d + d\rho_d$ . Pela Figura 11, observa-se que para distâncias cada vez mais distantes do horizonte de eventos, a probabilidade de se encontrar uma partícula com  $\omega/m < 1$  se torna cada vez mais suprimida: i.e., quanto mais próximo do horizonte de eventos o detector estiver, maior a probabilidade para a partícula ser detectada.

Uma situação mais realista seria considerar um *ensemble* de partículas com distribuição de energia  $\eta(\omega) = n_0 = cte$  e a probabilidade de um observador em um ponto  $\rho_0$  arbitrário detectar essas partículas com diferentes energias. Dessa vez, o detector é *calibrado* de forma que a diferença de energia seja dada por  $\Delta E = \omega_0$ , com a excitação do detector estando associada à detecção de uma partícula com  $E = \omega_0$ , como medida por um observador no ponto  $\rho_0$  (não necessariamente em  $\rho_0 = 4M$ ). A taxa de excitação

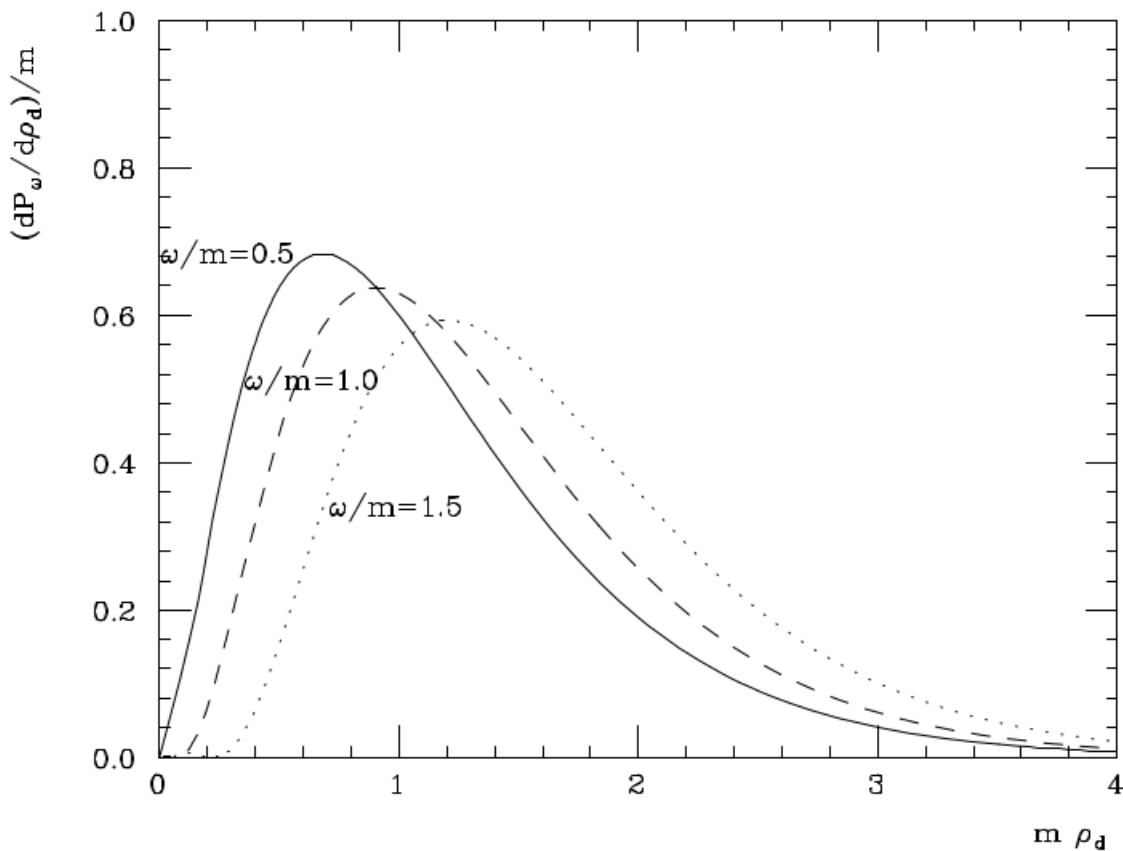


Figura 11 – Densidades de probabilidade (3.16) para diferentes valores de  $\omega/m$  com  $M = (4m)^{-1}$ . Fonte: [4].

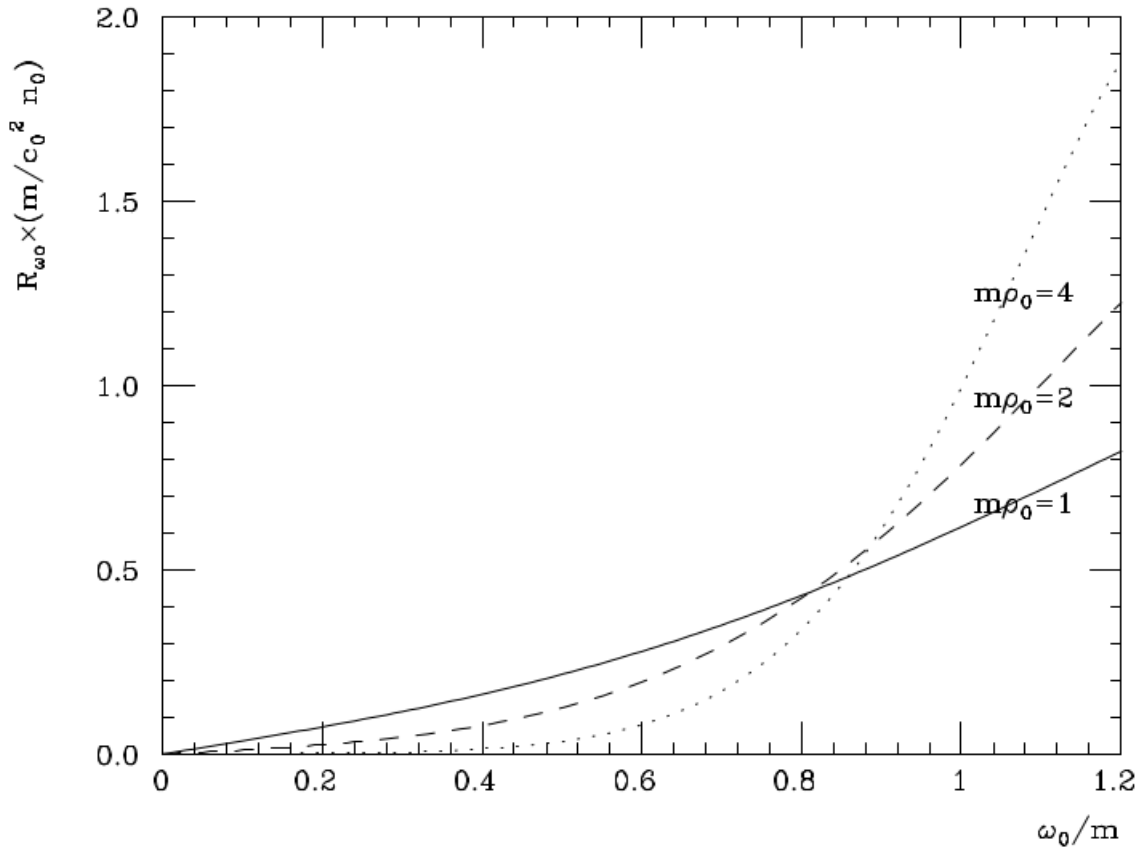


Figura 12 – Comportamento da taxa de excitação  $\mathcal{R}_{\omega_0}$  (3.18) por tempo próprio dos observadores como função de  $\omega_0/m$ . As curvas (de baixo para cima) são dadas em função de diferentes posições:  $\rho_0 = 4M$ ,  $\rho_0 = 8M$  e  $\rho_0 = 16M$ . Fonte: [4].

por tempo próprio  $\mathcal{T}$  do observador é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\omega_0} &= \frac{1}{\mathcal{T}} \int_0^{+\infty} \left| \langle 0| \otimes \langle E| \right) \hat{S}_I \left( |E_0\rangle \otimes |\omega\rangle \right) \left. \right|^2 \eta(\omega) d\omega = \\ &= \frac{2}{\pi} c_0^2 \eta_0 \rho_0 \sinh(\pi \omega_0 \rho_0) K_{i\omega_0 \rho_0}^2(m \rho_0), \end{aligned} \quad (3.18)$$

com  $c_0$  sendo novamente uma constante de acoplamento efetiva. Na Figura 11 os mesmos comportamentos da Figura 12 são observados: a detecção dessas partículas com  $\omega_0 < m$  se torna fortemente suprimida.

Resultados semelhantes para buracos negros e estrelas foram encontrados em [37], demonstrando que apesar de ‘possível’, a detecção de partículas com  $\omega < m$  em campos gravitacionais como o da Terra possam ser considerados como ruídos [4]. O que os resultados de fato nos dizem é que no sentido literal da palavra, sendo o ‘horizonte de eventos da Terra’ seria encontrado em um ponto interior distante da superfície, nas imediações da atmosfera a detecção dessas partículas seria efetivamente nula.

A compreensão de fenômenos envolvendo partículas com energias muito baixas

só se torna necessário em cenários mais extremos como em campos gravitacionais mais fortes (produzidos por buracos negros, por exemplo) ou em referenciais acelerados (como no caso do decaimento dos férmions acelerados explorado nas seções iniciais) [6].

## 3.2 Neutronização em estrelas de nêutrons

Em um modelo simplificado para se observar a influência do campo gravitacional em processos de resfriamento de estrelas de nêutrons, Vanzella e Matsas em [40] consideraram novamente o elemento de linha de Schwarzschild em 2D como o de Rindler (no sentido perturbativo), próximo do horizonte de eventos, como

$$ds^2 = (av)^2 d\tau^2 - dv^2 \quad (3.19)$$

com  $a = (4M)^{-1}$ , focando em  $(V) pe^- \rightarrow n\nu_e$  (2.65) como um dos mecanismos de resfriamento de partículas com  $T$  até  $10^9 K$  [41] ocorrendo no interior de estrelas de nêutrons. No formalismo semi-clássico, os núcleons permanecem estáticos em um ponto interior da estrela (com a localização determinada por sua aceleração própria  $a$ ) durante o processo  $(V)$ . Os sistemas próton-nêutron no interior da estrela, assim como na Seção 2.1, são descritos no quadrante direito de Rindler pelas correntes semi-clássicas

$$\hat{j}^\mu = \hat{q}(\tau) \frac{u^\mu}{u^0} \delta(v - a^{-1}) . \quad (3.20)$$

A amplitude de transição desse processo é a mesma que em (2.72) e (2.73), com ação dada por (2.71) e constante de acoplamento  $G_{2d} = 9.918 \times 10^{-13}$ . A taxa total de reação por tempo próprio total do núcleon  $\mathcal{T} = 2\pi\delta(0)$  é dada por

$$\Gamma(a) = \frac{1}{\mathcal{T}} \sum_{s_e=\pm} \sum_{s_\nu=\pm} \int_0^{+\infty} d\omega_{e^-} \int_0^{+\infty} d\omega_\nu |\mathcal{A}_{(v)}^{p \rightarrow n}|^2 n_F(\omega_{e^-}, T_{e^-}) [1 - n_F(\omega_\nu, T_\nu)] , \quad (3.21)$$

com fatores térmicos  $n_F(\omega, T) = 1/(1 + \exp(\omega/T))$  não do efeito Unruh, mas do banho térmico no interior da estrela em si (os núcleons estão aproximadamente estáticos no modelo) com temperaturas  $T_{e^-}$  e  $T_\nu$  para o ensemble de elétrons e neutrinos, respectivamente, no formalismo gran-canônico [34].

O processo de resfriamento é tal que os neutrinos produzidos e emitidos pela estrela extraem grande parte de sua energia [42]. Existem dois casos de interesse no processo de interação entre os neutrinos e elétrons:

- Caso I:  $T_{e^-} = 10^9 K$ ;  $T_\nu = 0 K$ : a estrela de nêutrons está fria o suficiente a ponto de ser *transparente* aos neutrinos, não há interação após sua emissão. Nesse caso, assume-se a temperatura dos neutrinos como 0 K.
- Caso II:  $T_{e^-} = T_\nu \approx 10^{10} K$ : a estrela está em equilíbrio térmico; somente com a temperatura da estrela de nêutrons  $T_{EN} > 10^9 K$  têm-se  $T_{EN} = T_\nu$  [35].

Realizando passos similares aos da passagem de (2.76) para (2.85), a taxa total de reação pode ser reescrita como:

$$\Gamma(a) = \frac{4G_{2d}^2 m_e}{\pi^2 a} \int_{\Delta M}^{+\infty} d\omega_{e^-} \cosh(\pi\omega_{e^-}/a) \frac{K_{i\omega_{e^-}/a+1/2}(m_e/a) K_{i\omega_{e^-}/a-1/2}(m_e/a)}{\left[1 + \exp(\omega_{e^-}/T_{e^-})\right] \left[1 + \exp[(\Delta M - \omega_{e^-})/T_\nu]\right]}, \quad (3.22)$$

tomando cuidado com o fato de que o termo de radiação de Unruh não surge nesse caso para ser cancelado identicamente (diferente dos casos em que há a presença do Efeito Unruh, como na Seção 1.4), tendo em vista que além do núcleon estar instantaneamente estático no momento de interação, o processo de resfriamento ocorre em um meio e não no vácuo.

No intuito de comparar com o resultado de (3.22) para  $a \rightarrow 0$ , a amplitude de transição em Minkowski para o núcleon totalmente inercial é calculado a partir da ação

$$\hat{S}_I = \int d^2x \sqrt{-g} \hat{j}_\mu \left( \hat{\Psi}_\nu \gamma^\mu \hat{\Psi}_e + \hat{\Psi}_e \gamma^\mu \hat{\Psi}_\nu \right). \quad (3.23)$$

com  $\hat{j} = \hat{q}(t) v^\mu \delta(z)$  e  $v^\mu = (\gamma c, 0) = (1, 0)$ , de forma a se obter

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{(v)}^{p \rightarrow n} &= \left( \langle n | \otimes \langle \nu_{\omega_\nu s_\nu} | \right) \hat{S}_I \left( | e_{\omega_e s_e}^- \rangle \otimes | p \rangle \right) = \\ &= G_{2d} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i\Delta M t} \langle \nu_{\omega_\nu s_\nu} | \hat{\Psi}_\nu(t, 0) \hat{\Psi}_e(t, 0) | e_{\omega_e s_e}^- \rangle = \\ &= G_{2d} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i\Delta M t} \psi_{k_\nu s_\nu}^{(+\omega_\nu)^\dagger}(t, 0) \psi_{k_e s_e}^{(+\omega_e)}(t, 0). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Os modos normais como solução da equação de Dirac com spin up e down, respectivamente, dados por

$$\psi_{\mathbf{k}^+}^{(\pm\omega)}(x) = \frac{e^{-i(\pm\omega t - kz)}}{\sqrt{2\pi}} \begin{bmatrix} \pm\sqrt{(\omega \pm m)/2\omega} \\ 0 \\ k/\sqrt{2\omega(\omega \pm m)} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

e

$$\psi_{\mathbf{k}^-}^{(\pm\omega)}(x) = \frac{e^{-i(\pm\omega t - kz)}}{\sqrt{2\pi}} \begin{bmatrix} 0 \\ \pm\sqrt{(\omega \pm m)/2\omega} \\ 0 \\ -k/\sqrt{2\omega(\omega \pm m)} \end{bmatrix}, \quad (3.26)$$

são extremamente similares aos (2.7) e (2.8), mas em duas dimensões apenas e com uma diferença de normalização de  $\sqrt{4\pi^2}$  [ver apêndice B]. A taxa de neutronização total nesse caso é dada por

$$\Gamma_{inertial} = \frac{2G_{2d}^2}{\pi} \int_{K_{min}}^{\infty} dk_{e^-} \frac{1}{\left(1 + \exp(\omega_{e^-}/T_{e^-})\right) \left(1 + \exp((\Delta M - \omega_{e^-})/T_\nu)\right)} \quad (3.27)$$

com  $K_{min} = \sqrt{(\Delta M)^2 - m_e^2}$ .

Para se observar a influência gravitacional sobre os processos de resfriamento (através do princípio da equivalência), uma taxa de reação *relativa* é definida utilizando (3.22) e (3.27):

$$\mathcal{R}(a) := \frac{\Gamma(a) - \Gamma_{inertial}}{\Gamma_{inertial}}, \quad (3.28)$$

com  $\mathcal{R}(a \rightarrow 0) \rightarrow 0$ . Pela Figura 13, ambos os casos apresentam um comportamento oscilatório até  $a = 1 \text{ MeV}$ , e exatamente nesse valor temos a maior influência positiva da aceleração em ambos os casos:  $|\mathcal{R}(a)| \rightarrow 30\%$  no caso I e  $10\%$  no caso II.

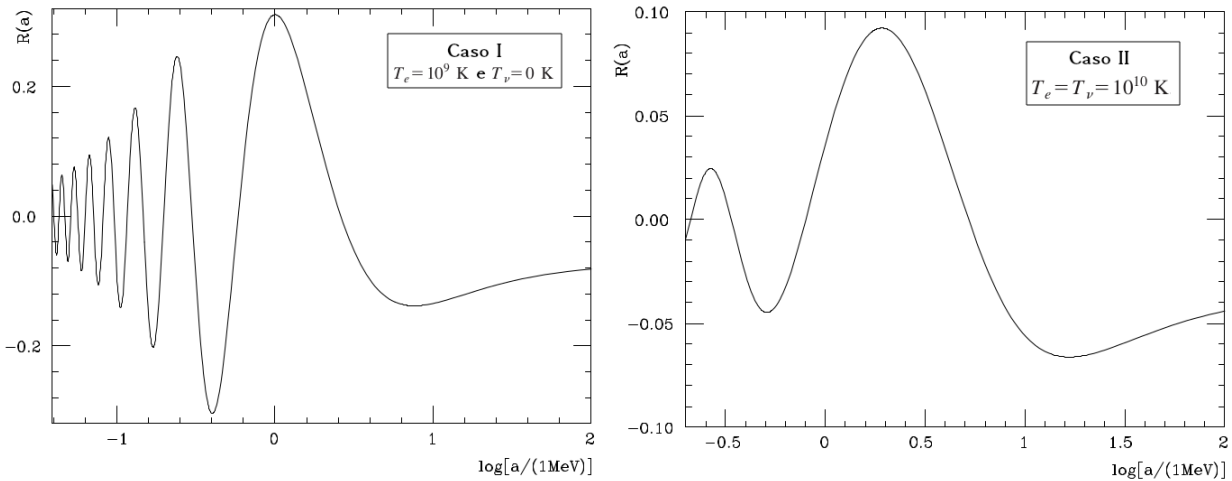


Figura 13 – *Comportamento da taxa de reação relativa (3.27) em função do logaritmo da aceleração do núcleon para o caso I em que a estrela está fria o suficiente para que os neutrinos não interajam com as outras partículas, e para o caso II em que o interior da estrela como um todo está em equilíbrio térmico. Fonte: Adaptada de [4].*

No regime em que  $a \gg \Delta M$ , pode-se utilizar a propriedade (2.84) em (3.22) de forma que a sua expressão assintótica possa ser dada por

$$\Gamma(a) = \frac{2G_{2d}^2}{\pi} \int_{\Delta M}^{+\infty} d\omega_{e^-} \frac{1}{\left[1 + \exp(\omega_{e^-}/T_{e^-})\right] \left[1 + \exp[(\Delta M - \omega_{e^-})/T_\nu]\right]}. \quad (3.29)$$

Nesse caso, as taxas de neutronização são suprimidas para acelerações muito altas. Essa supressão pode atingir um percentual de  $\mathcal{R}(a \gg \Delta M, T_{e^-}) \approx -7.2\%$  no caso I e de  $-3.5\%$  no caso II.

Para prótons na superfície de uma estrela de nêutrons a aceleração típica de  $a = M/[R^2(1 - 2M/R)^{1/2}] \approx 10^{-17} \text{ MeV}$  [40], com o raio das estrelas de nêutron  $R \approx 10^4 m$ , e massa  $M \approx M_{solar}$  [35], de forma que a influência da gravitação no processo (V) de resfriamento da estrela, como vista por esse modelo simplificado, seria ínfima. Apesar disso, uma resposta mais realista sobre a influência da gravidade só poderia ser encontrada levando em consideração o espaço-tempo de Schwarzschild em 4 dimensões [6].



# Conclusão

Nos quase 20 anos após o trabalho de Vanzella e Matsas, os resultados obtidos no contexto do decaimento de férmions acelerados na tese [6] continuam sendo importantes e essenciais para a ‘comprovação teórica’ do efeito Unruh na falta de uma comprovação experimental. Recentemente, os resultados foram revisitados em [43] levando-se em consideração os fenômenos de mistura e oscilação de neutrinos. Contradizendo os resultados explorados no Capítulo 2, o trabalho afirmou que dada uma análise dos decaimentos beta sob essa nova perspectiva, os tempos de meia vida obtidos em referenciais inerciais e co-acelerados poderiam divergir. Em trabalhos independentes [44][45] considerando-se autoestados de sabor e massa de neutrinos, respectivamente, demonstrou-se que a covariância geral da teoria ainda deveria ser obedecida e, portanto, os tempos de meia vida calculados ainda deveriam ser os mesmos em ambos referenciais. Apesar de muito interessante, uma revisão a respeito da influência da oscilação e mistura de neutrinos nesses trabalhos recentes será deixada para uma outra oportunidade no futuro.

Os resultados do Capítulo 3 oferecem indicativos interessantes sobre a influência gravitacional em processos de resfriamento no interior de estrelas de nêutrons: no caso em que o núcleon possui uma aceleração de exatos 1 MeV, os processos  $pe^- \rightarrow n\nu_e$  são amplificados em pelo menos 10%. Para acelerações maiores que  $\Delta M = (m_n - m_p) \approx 1$  MeV, esses processos devem ser levemente atenuados. Porém, sendo a aceleração de prótons na superfície dessas estrelas da ordem de  $10^{-17}$  MeV, a influência dos referenciais acelerados é desprezível.

No contexto da detecção de partículas que não obedeçam a relação de dispersão, os resultados indicam que de fato a detecção dessas se dá como praticamente impossível longe do horizonte de eventos, de forma que as condições atuais de aceleradores e detectores na vizinhança da Terra ainda atestam com bastante eficácia a validade de  $E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$ . Apesar disso, os diferentes vínculos impostos à energia de uma partícula devido às simetrias intrínsecas do quadrante de Rindler são de suma importância para o estudo de partículas uniformemente aceleradas como demonstrado no Capítulo 2.

Ambos os resultados encontrados no Capítulo 3 fazem o uso indireto do princípio da equivalência geral, associando o elemento de linha de Schwarzschild em duas dimensões ao de Rindler. Entretanto, como mencionado nos trabalhos originais [37][40] apenas uma consideração exata em Schwarzschild em suas quatro dimensões, levando também em consideração efeitos da curvatura do espaço-tempo seriam realistas o suficiente para representar a influência gravitacional nos processos de resfriamento em estrelas de nêutrons e de detecção de partículas com energia  $< mc^2$  nas imediações da superfície terrestre.



# Referências

- 1 MAGGIORE, M. *A Modern Introduction to Quantum Field Theory*. [S.l.]: Oxford University Press, 2005. Citado 11 vezes nas páginas 11, 23, 24, 25, 28, 44, 49, 51, 56, 57 e 75.
- 2 GRIFFITHS, D. *Introduction to Elementary Particles*. [S.l.]: Wiley-Vch, 2008. Citado 12 vezes nas páginas 11, 16, 23, 24, 25, 27, 33, 36, 37, 51, 54 e 76.
- 3 VANZELLA, D. A. T. *Probing the Unruh Effect with an extended system*. [S.l.]: Universidade de Brasília, DF, Brazil, 2019. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 38.
- 4 VANZELLA, D. A. T. *Férmions em Referenciais Acelerados: Desintegração de Prótons e Outras Aplicações*. Tese (Doutorado) — Instituto de Física Teórica - Unesp, São Paulo, Brasil, 2001. Disponível em: <<https://repositorio.unesp.br/handle/11449/102503>>. Acesso em: 19.5.2019. Citado 12 vezes nas páginas 11, 12, 16, 33, 34, 45, 46, 47, 54, 58, 59 e 62.
- 5 MÜLLER, R. Decay of accelerated particles. *Physical Review D*, v. 56, n. 2, p. 953–960, 1997. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 49.
- 6 VANZELLA, D. A. T.; MATSAS, G. E. A. Weak decay of uniformly accelerated protons and related processes. *Physical Review D*, v. 63, n. 014010, p. 1–10, 2000. Citado 6 vezes nas páginas 15, 43, 53, 60, 62 e 63.
- 7 VANZELLA, D. A. T.; MATSAS, G. E. A. Decay of accelerated protons and the existence of the fulling-davies-unruh effect. *Physical Review Letters*, v. 87, n. 151301, p. 1–4, 2001. Citado 4 vezes nas páginas 15, 22, 47 e 48.
- 8 VANZELLA, D. A. T.; MATSAS, G. E. A. Decay of protons and neutrons induced by acceleration. *Physical Review Letters*, v. 59, n. 094004, p. 1–4, 1999. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 49.
- 9 MATSAS, G. E. A.; VANZELLA, D. A. T. The fulling-davies-unruh effect is mandatory: The proton’s testimony. *International Journal of Modern Physics D*, v. 11, n. 10, p. 1573–1577, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 53.
- 10 SUZUKI, H.; YAMADA, K. Analytic evaluation of the decay rate for an accelerated proton. *Physical Review D*, v. 67, n. 065002, p. 1–11, 2003. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 47.
- 11 PESKIN, M. E.; SCHROEDER, D. V. *An Introduction to Quantum Field Theory*. [S.l.]: Westview Press, 1995. Citado na página 16.
- 12 BIRRELL, N. D.; DAVIES, P. C. W. *Quantum Fields in Curved Space*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1984. Citado 13 vezes nas páginas 21, 22, 25, 26, 28, 29, 30, 42, 50, 51, 52, 55 e 56.
- 13 ZETTLI, N. *Quantum Mechanics: Concepts and Applications*. [S.l.]: Wiley, John & Sons, 2010. Citado 4 vezes nas páginas 21, 26, 55 e 57.

- 14 The NIST Reference on Constants, Units, and Uncertainty. *Planck mass energy equivalent in GeV*. 20018. <<https://physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Value?plkmc2gev>>. [Online; acessado em 15 de Outubro de 2019]. Citado na página 21.
- 15 SHAPIRO, I. L. *Lectures on Curved-Space QFT: Elements of QFT in Curved Space-Time*. [S.l.]: Universidade Federal de Juiz de Fora, MG, Brazil, 2012. Citado na página 21.
- 16 NUNES, F. F. *Radiação Hawking de Buracos Negros em Rotação: uma dedução analítica em Kerr-Newman*. Tese (Trabalho de Conclusão de Curso) — Instituto de Física - Universidade de Brasília, Brasília, Brasil. Citado na página 22.
- 17 CARROLL, S. M. *An Introduction to General Relativity Spacetime and Geometry*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2004. Citado 5 vezes nas páginas 22, 49, 55, 56 e 57.
- 18 ITZYKSON, C.; ZUBER, J. B. *Quantum Field Theory*. [S.l.]: Dover Publications, 2006. Citado 6 vezes nas páginas 22, 28, 35, 51, 55 e 57.
- 19 Hawking, S. W. Black hole explosions? *Nature*, v. 248, p. 30–31, mar. 1974. Citado na página 22.
- 20 HAWKING, S. W. Particle creation by black holes. *Comm. Math. Phys.*, Springer, v. 43, n. 3, p. 199–220, 1975. Disponível em: <<https://projecteuclid.org/443/euclid.cmp/1103899181>>. Citado na página 22.
- 21 UNRUH, W. G. Notes on black-hole evaporation. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 14, p. 870–892, Aug 1976. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.14.870>>. Citado na página 22.
- 22 LIMA, C. A. U. et al. Probing the Unruh effect with an accelerated extended system. *Nature Commun.*, v. 10, n. 1, p. 3030, 2019. Citado na página 23.
- 23 PAGANINI, P. *Lecture Notes: An Introduction to the Standard Model of Particle Physics*. [S.l.]: Laboratoire Leprince Ringuet, Ecole Polytechnique, Palaiseau France, 2014–2015. Citado na página 25.
- 24 CRISPINO, L.; HIGUCHI, A.; MATSAS, G. E. A. The unruh effect and its applications. *Reviews of Modern Physics*, v. 80, n. 3, p. 787–838, 2008. Citado 3 vezes nas páginas 25, 34 e 52.
- 25 GRADSHTEYN, I. S.; RYZHIK, I. M. *Table of Integrals, Series, and Products*. [S.l.]: Academic Press, 2014. Citado 5 vezes nas páginas 28, 40, 42, 50 e 71.
- 26 ABLOWITZ, M. J.; FOKAS, A. S. *Complex Variables: Introduction and Applications*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2003. Citado 3 vezes nas páginas 28, 29 e 52.
- 27 LANCASTER, T.; BLUNDELL, S. J. *Quantum Field Theory for the Gifted Amateur*. [S.l.]: Oxford University Press, 2014. Citado na página 28.
- 28 WALD, R. M. *Quantum Field Theory in Curved Spacetime and Black Hole Thermodynamics*. [S.l.]: University of Chicago Press, 1994. Citado na página 35.

- 29 TANABASHI, M. et al. Review of particle physics. *Physical Review D*, American Physical Society, v. 98, n. 094004, p. 030001, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 44 e 45.
- 30 RINDLER, W. *Relativity: Special, General, and Cosmological*. [S.l.]: University of Chicago Press, 2006. Citado na página 46.
- 31 TOKUHISA, A.; KAJINO, T. Meson synchrotron emission from central engines of gamma-ray bursts with strong magnetic fields. *Astrophysical Journal Letters*, v. 525, n. 2, p. L117–L120, 1999. Citado na página 46.
- 32 GIUNTI, C.; KIM, C. W. *Fundamentals of Neutrino Physics and Astrophysics*. [S.l.]: Oxford University Press, 2007. Citado na página 49.
- 33 MCMAHON, D.; ALSING, P. M.; EMBID, P. *The Dirac equation in Rindler space: A pedagogical introduction*. 2006. Citado 2 vezes nas páginas 50 e 51.
- 34 LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. *Statistical Physics, Part 1 (Course of Theoretical Physics, Volume 5)*. [S.l.]: Butterworth-Heinemann, 1980. Citado 2 vezes nas páginas 52 e 60.
- 35 POTEKHIN, A. Y. The physics of neutron stars. *Physics-Uspekhi*, Uspekhi Fizicheskikh Nauk (UFN) Journal, v. 53, n. 12, p. 1235–1256, dec 2010. Disponível em: <<https://doi.org/10.3367%2Fufne.0180.201012c.1279>>. Citado 3 vezes nas páginas 55, 60 e 62.
- 36 WALD, R. M. The Formulation of Quantum Field Theory in Curved Spacetime. *Einstein Stud.*, v. 14, p. 439–449, 2018. Citado na página 55.
- 37 CASTINEIRAS, J. et al. Free massive particles with total energy  $E < mc^2$  in curved spacetimes. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 65, p. 104019, May 2002. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.65.104019>>. Citado 4 vezes nas páginas 55, 57, 59 e 63.
- 38 MOSCHELLA, U.; SCHAEFFER, R. A note on canonical quantization of fields on a manifold. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, IOP Publishing, v. 2009, n. 02, p. 033033, Feb 2009. ISSN 1475-7516. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2009/02/033>>. Citado na página 56.
- 39 COHEN-TANNOUJDI, B. D. C.; LALOË, F. *Quantum Mechanics, Volume 2*. [S.l.]: Wiley-VCH, 1991. Citado na página 57.
- 40 VANZELLA, D. A. T.; MATSAS, G. E. A. Search for semiclassical gravity effects in relativistic stars. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 61, p. 127303, May 2000. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.61.127303>>. Citado 3 vezes nas páginas 60, 62 e 63.
- 41 HAENSEL, P. Urca processes in dense matter and neutron star cooling. *Space Science Reviews*, v. 74, n. 3, p. 427–436, Nov 1995. ISSN 1572-9672. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF00751429>>. Citado na página 60.
- 42 GAMOW, G.; SCHOENBERG, M. Neutrino theory of stellar collapse. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 59, p. 539–547, Apr 1941. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.59.539>>. Citado na página 60.

- 43 AHLUWALIA, D. V.; LABUN, L.; TORRIERI, G. Neutrino mixing in accelerated proton decays. *The European Physical Journal A*, v. 52, n. 7, p. 189, 2016. Citado na página 63.
- 44 COZZELLA, G. et al. Unruh effect for mixing neutrinos. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 97, p. 105022, May 2018. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.97.105022>>. Citado na página 63.
- 45 BLASONE, M. et al. Role of neutrino mixing in accelerated proton decay. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 97, p. 105008, May 2018. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.97.105008>>. Citado na página 63.

# Apêndices





# APÊNDICE A – Funções Especiais e Propriedades

As expressões que se encontram em [25] possuem a numeração original correspondente ao lado esquerdo das equações. As demais podem ser encontradas facilmente em outros livros de física matemática, ou qualquer base de dados especializada como em *Wolfram Alpha LLC, 2018. Wolfram/Alpha*.

## Função Gamma e Propriedades

$$\Gamma(n) = (n - 1)! \quad [n \in \mathbb{Z}^+] \quad (\text{A.1})$$

$$\Gamma(n + 1/2) = \frac{\sqrt{\pi}(2n)!}{4^n n!} \quad (\text{A.2})$$

## Funções hiperbólicas

$$\sinh x - \sinh y = 2 \sinh[(x - y)/2] \cosh[(x + y)/2] \quad (\text{A.3})$$

$$\cosh x - \cosh y = 2 \sinh[(x - y)/2] \sinh[(x + y)/2] \quad (\text{A.4})$$

$$\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y \quad (\text{A.5})$$

$$\sinh(x - y) = \sinh x \cosh y - \cosh x \sinh y \quad (\text{A.6})$$

$$\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y \quad (\text{A.7})$$

$$\cosh(x - y) = \cosh x \cosh y - \sinh x \sinh y \quad (\text{A.8})$$

$$\sinh^2(x) + \cosh^2(x) = \cosh(2x) \quad (\text{A.9})$$

$$\sinh \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{\cosh x - 1}{2}} \quad (\text{A.10})$$

## Funções de Bessel Modificadas de 2o Tipo e Propriedades

- Sendo  $K_\nu(x)$  a função de Bessel modificada de segundo tipo,

$$(3.471.10) \quad \int_0^{+\infty} x^{\nu-1} \exp\left[\frac{i\mu}{2}\left(x - \frac{\beta^2}{x}\right)\right] dx = 2\beta^\nu e^{i\nu\pi/2} K_{-\nu}(\beta\mu), \quad (\text{A.11})$$

com  $\text{Im}\{\mu\} > 0$  e  $\text{Im}\{\beta^2\mu\} > 0$ .

- 

$$(6.592.4) \quad \int_1^\infty x^\lambda (x-1)^{\mu-1} K_\nu(a\sqrt{x}) dx = \Gamma(\mu) 2^{2\lambda-1} a^{-2\lambda} \\ \times G_{1,3}^{3,0}\left(\frac{a^2}{4} \middle| \begin{matrix} 0 \\ -\mu, \nu/2+\lambda, -\nu/2+\lambda \end{matrix}\right), \quad (\text{A.12})$$

com  $\text{Re } a > 0$  e  $\text{Re } \mu > 0$ .

- 

$$(7.811.3) \quad \int_1^\infty x^{-\rho} (x-1)^{\sigma-1} G_{p,q}^{m,n}\left(\alpha x \middle| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix}\right) = \Gamma(\sigma) G_{p+1,q+1}^{m+1,n}\left(\alpha \middle| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p, \rho \\ \rho-\sigma, b_1, \dots, b_q \end{matrix}\right) \quad (\text{A.13})$$

com as seguintes condições devendo ser satisfeitas

- $p + q < 2(m + n)$
- $|\arg \alpha| < (m + n - p/2 - q/2) \pi$
- $\text{Re}\{\rho - \sigma - a_j\} > -1; \quad j = 1, \dots, n$
- $\text{Re } \sigma > 0$
- uma das seguintes:

$$p + q \leq 2(m + n), |\arg \alpha| \leq (m + n - p/2 - q/2) \pi, \\ \text{Re}\{\rho - \sigma - a_j\} > -1; \quad j = 1, \dots, n; \quad \text{Re}\{\sigma\} > 0 \\ \text{Re}\left\{\sum_{j=1}^p a_j - \sum_{j=1}^q b_j + (q - p)(\rho - \sigma + 1/2)\right\} > -\frac{1}{2}$$

ou

$$q < p \text{ (ou } q \leq p \text{ para } |\alpha| > 1), \text{Re}\{\rho - \sigma - a_j\} > -1; \quad j = 1, \dots, n; \text{Re}\{\sigma\} > 0$$

- Se  $m, p, q > 1$

$$G_{p,q}^{m,n}\left(x \middle| \begin{matrix} a_1, \dots, a_{p-1}, b_1 \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix}\right) = G_{p-1,q-1}^{m-1,n}\left(x \middle| \begin{matrix} a_1, \dots, a_{p-1} \\ b_2, \dots, b_q \end{matrix}\right), \quad (\text{A.14})$$

notando que o termo  $b_1$  que se repete, não aparece mais após a igualdade.

- Sendo  $J_\nu(z)$  e  $Y_\nu(z)$  funções de Bessel de primeiro e segundo tipo, respectivamente, a relação

$$(8.403.1) \quad Y_\nu(z) = \frac{1}{\sin \nu\pi} [\cos \nu\pi J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)], \quad (\text{A.15})$$

é válida para  $\nu$  não inteiro e  $|\arg z| < \pi$ .

•

$$(8.405.1) \quad H_\nu^{(1)}(z) = J_\nu(z) + iY_\nu(z), \quad (\text{A.16})$$

com  $H_\nu^{(1)}$  sendo uma das funções de Bessel de terceiro tipo.

•

$$(8.407.1) \quad K_\nu(z) = \frac{\pi i}{2} e^{\frac{\pi}{2}\nu i} H_\nu^{(1)}\left(ze^{\frac{1}{2}\pi i}\right), \quad (\text{A.17})$$

com  $-\pi < \arg z \leq \pi/2$ .

• Das expressões (8.407.1), (8.405.1) e (8.403.1) obtêm-se:

$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2 \sin(\nu\pi)} \left[ J_{-\nu}(iz) e^{i\nu\pi/2} - J_\nu(iz) e^{-i\nu\pi/2} \right], \quad (\text{A.18})$$

para  $\nu$  não inteiro e  $|\arg iz| < \pi$ .

•

$$(8.402) \quad J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{(z/2)^{\nu+2k}}{k! \Gamma(\nu+k+1)} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1+\nu)} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \left\{ 1 - \frac{(z/2)^2}{1(1+\nu)} \left( 1 - \frac{(z/2)^2}{2(2+\nu)} \left( 1 - \frac{(z/2)^2}{3(3+\nu)} (1 - \dots) \right) \right) \right\} \quad (\text{A.19})$$

• De (A.18) e (8.402), para  $|z| \approx 0$ :

$$K_\nu(z) \approx \frac{\pi}{2 \sin \nu(\pi)} \left[ (iz/2)^{-\nu} \Gamma^{-1}(-\nu+1) e^{i\nu\pi/2} - (iz/2)^2 \Gamma^{-1}(\nu+1) e^{-i\nu\pi/2} \right] \quad (\text{A.20})$$



# APÊNDICE B – Equação de Dirac e Modos Normais em um Espaço-Tempo Clássico de Fundo

A equação de Dirac em um espaço-tempo clássico de fundo (ou seja, em teoria quântica de campos usual) é dada por

$$i(\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0, \quad (\text{B.1})$$

sendo  $\gamma^\mu$  as matrizes gamma  $4 \times 4$  na representação de Dirac [1], i.e.,

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.2})$$

com  $I_2$  a matrix  $2 \times 2$  unitária, e  $\sigma^i$  as matrizes de pauli  $2 \times 2$  definidas como

$$\sigma^1 = \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{e} \quad \sigma^3 = \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.3})$$

Sendo a equação de Dirac um sistema linear de equações diferenciais parciais de 1ª ordem, pelo método de separação de variáveis suas soluções são dadas por  $\psi^{\pm\omega}(x) = u(k) \exp(\mp i k x)$ , ou seja, uma *superposição* de ondas planas tal que a energia da partícula descrita seja dada por  $\omega = \pm\sqrt{k^2 + m^2}$  em *unidades naturais* e  $u(k) = \begin{pmatrix} \varphi(k) \\ \chi(k) \end{pmatrix}$  com  $\varphi(k)$  e  $\chi(k)$  sendo espinores. Dessa forma, (B.1) se torna:

$$(\pm\gamma^\mu k_\mu - m) \begin{pmatrix} \varphi(k) \\ \chi(k) \end{pmatrix} \exp(\mp i k x) = 0, \quad (\text{B.4})$$

e sendo  $\gamma^\mu k_\mu = \gamma^0 k_0 - \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{k} = \begin{pmatrix} \omega I_2 & -\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k} & -\omega I_2 \end{pmatrix}$  encontramos

$$(\omega \mp m)\varphi - (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k})\chi = 0 \quad (\text{B.5})$$

e

$$(\omega \pm m)\chi - (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k})\varphi = 0. \quad (\text{B.6})$$

Para a solução de energia positiva, encontramos através da segunda expressão, por exemplo,

$$\chi = \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k}}{\omega + m}\varphi. \quad (\text{B.7})$$

Notando que  $\sigma \cdot \mathbf{k} = \begin{pmatrix} k_z & k_x - ik_y \\ k_x + ik_y & -ik_z \end{pmatrix}$ , (B.7) pode ser reescrita como

$$(\sigma \cdot \mathbf{k}) \chi = \frac{(\sigma \cdot \mathbf{k})^2}{\omega + m} \varphi = \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}}{\omega + m} \varphi = (\omega - m) \varphi, \quad (\text{B.8})$$

utilizando a propriedade  $(\mathbf{a} \cdot \sigma)(\mathbf{b} \cdot \sigma) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) I_2 + i(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \sigma$ . Além disso, as componentes do espinor  $\varphi(x)$  são dadas por  $\varphi_1 = N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  e  $\varphi_2 = N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , onde  $N$  é uma constante de normalização a ser determinada, de forma que as componentes  $u(k)$  das soluções para spin *up* e *down* com  $+\omega$  são dadas por\*:

$$u_1(k) = N \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \frac{\sigma \cdot \mathbf{k}}{\omega + m} \varphi_1 \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{k_z}{\omega + m} \\ \frac{k_x + ik_y}{\omega + m} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad u_2(k) = N \begin{pmatrix} \varphi_2 \\ \frac{\sigma \cdot \mathbf{k}}{\omega + m} \varphi_2 \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{k_x - ik_y}{\omega + m} \\ \frac{-k_z}{\omega + m} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.9})$$

A constante de normalização  $N$  é escolhida de forma que o produto interno (2.9) e a relação  $u^\dagger u = v^\dagger v = (2\pi)^{-3\dagger}$  sejam obedecidas - onde as matrizes  $v(k)$  são associadas às soluções de antipartículas ( $\propto \exp(+ikx)$  em (B.4))[2] -, logo,  $N = \left(2(2\pi)^3 \omega (\omega \pm m)\right)^{-1/2}$ .

---

\*As soluções para  $-\omega$  podem ser encontradas de forma similar, notando que a única diferença entre ambas provém do sinal de  $m$ .

†Qualquer múltiplo de  $u(k)$  ainda é uma solução de (B.4), de forma que a normalização apenas fixa as constantes resultantes da maneira mais conveniente. Portanto, o termo não usual  $(2\pi)^{-3}$  surge para ser cancelado com termos idênticos em (2.9).

# Anexos





## .1 Recomendação de Estudos sobre Pré-Requisitos

O presente trabalho de conclusão de curso tem como limitação o fato de não ser totalmente auto-contido. Mesmo a leitura dos capítulos iniciais exige uma familiarização com conceitos de física de partículas e teoria quântica de campos. Apesar de que idealmente o fornecimento desse material deva ser feito na introdução teórica, por motivos temporais uma abordagem mais sucinta (mas amplamente referenciada) foi adotada. Não obstante, uma recomendação desses estudos pode ser feita tendo em mente principalmente um(a) estudante de graduação em física.

- Física de Partículas Elementares: um conhecimento da construção de amplitudes de transição e seções de choque em nível de árvore é aconselhável. Além disso, uma familiarização com o regime de Fermi do Modelo Padrão e a compreensão de como fatores de forma aparecem perturbativamente na teoria pode ser útil, apesar desses elementos serem apresentado no Capítulo 1 de forma qualitativa.

Principal referência:

- *Introduction to Elementary Particles*, David Griffiths (2nd Edition, 2008): Capítulos 1-4, 6-9. Pode ser iniciado por um estudante de graduação após seu primeiro curso de Relatividade e Física Quântica. Apesar de alguns conceitos como a Regra de Ouro de Fermi necessitarem de uma formalização em teoria de perturbação, o livro oferece uma boa introdução até o(a) estudante alcançar um curso padrão de mecânica quântica.

Referências complementares:

- *An Introduction to the Standard Model of Particle Physics*, Pascal Paganini (Lecture Notes, 2014-2015).
- *Gauge Theories of the Strong, Weak, and Electromagnetic Interactions*, Chris Quigg (2nd Edition, 2013).
- Teoria Quântica de Campos: tanto o formalismo da quantização canônica de campos quanto a construção das amplitudes de transição são conhecimentos obrigatórios. A compreensão da construção da matriz LSZ, da definição de vácuo e do conteúdo de partículas é também essencial para a comparação em perspectivas aceleradas uniformemente.

Principal referência:

- *A Modern Introduction to Quantum Field Theory*, M. Maggiore (2005): Capítulos 1-8. Provavelmente uma das introduções mais amigáveis à TQC (junto com a primeira referência complementar) para um(a) estudante entrando na fase final de sua graduação.

Referências complementares:

- *Quantum Field Theory for the Gifted Amateur*, T. Lancaster e S. J. Blundell (1st Edition, 2014).
  - *An Introduction To Quantum Field Theory*, M. Peskin e D. V. Schroeder (1st Edition, 2007).
  - *Advanced Quantum Field Theory*, J. C. Romão (Lecture Notes, 2019).
  - *Quantum Field Theory*, C. Itzykson e J. B. Zuber (2006).
- Teoria Quântica de Campos em Espaços Curvos: apesar de todos os resultados não explorarem consequências devido à curvatura do espaço-tempo, o(a) leitor(a) deve estar bem familiarizado com conceitos iniciais (ainda em Minkowski) como o formalismo do detector de Unruh-DeWitt, uma noção conceitual do Efeito Unruh e de fenômenos similares de produção de partículas na presença de campos gravitacionais.

Principal referência:

- *Quantum Fields in Curved Space*, N. D. Birrell e P. C. W. Davies (1984): Capítulos 1, 2 (2.1-2.6), 3 (3.1-3.4) e 4.

Referências Complementares:

- *Introduction to Quantum Effects in Gravity*, V. Mukhanov e S. Winitzki (1st Edition, 2007).
- *Quantum Field Theory in Curved Spacetime and Black Hole Thermodynamics*, Robert M. Wald (1st Edition, 1994).
- *Quantum Field Theory in Curved Spacetime: Quantized Fields and Gravity*, L. Parker e David Toms (1st Edition, 2009).